

小树老师的数学课

1.2 基础02

上一节课的复习

- PS DS 的做题技巧 和题目逻辑
- Factor 题目和它的小伙伴们
 - ◆Factor 类型提示词： 4个 →解题第一步
 - ◆Factor number: PFN 的两种区分
 - ◆Remainder 的2个模型题
 - ◆奇偶性考点模型

直播课程1 课堂作业 回顾

- 在正整数下的余数，负整数的余数怎么做？

比如 $-14 \div 8$ 的余数？
 $-14 = -8 \times 2 + 2$ 余数是2

比如 $-14 \div 3$ 的余数
 $-14 = 3 \times (-5) + 1$

总结： 就是乘以一个比绝对值大1 的负数 后 在计算余数

测试题

What is the remainder, after division by 100, of 7^{10} ?

- ☐ A 1
- ☐ B 7
- ☐ C 43
- ☐ D 49
- ☐ E 70

测试题

If n is a positive integer and r is the remainder when $(n-1)(n+1)$ is divided by 24, what is the value of r ?

- (1) 2 is not a factor of n .
- (2) 3 is not a factor of n .

$(n-1)(n+1)$ 两个偶数 or 两个奇数 乘积 除以24 ?
1 n 不是偶数 是奇数 $n=2x+1$ 带入 $2x(2x+2) = 4x(x+1)$ 一定是8的倍数 因为 $x, x+1$ 中一定有一个是偶数 NS
2 $n=3x+1$ or $3x+2$ 带入 $3x(3x+2)$ or $3x(3x+3)$ 两者都符合的一定是3的倍数 NS
1+2 一定是3和8的倍数 整除 $r=0$ S
C

课前测试题

When positive integer x is divided by positive integer y , the remainder is 9. If $\frac{x}{y} = 96.12$, what is the value of y ?

- ☐ A 96
- ☐ B 75
- ☐ C 48
- ☐ D 25
- ☐ E 12

Arithmetic 数理部分-fractions

- Fractions

n/d , n is numerator and d is the denominator. Denominator is never be 0.

Greatest common divisor:最大公约数

Smallest common multiple:最小公倍数

分数的计算

- mixed numbers

Example: $7\frac{2}{3}$

Arithmetic 数理基础-比率

- Ratio and proportion

The ratio of the number a to the number b ($b \neq 0$) is a/b

- a proportion is a statement that two ratios are equal;
For example, $2/3=8/12$ 【考计算】

Arithmetic -percent

- Percent $n\%=n/100$

- $N\%>100\%$ 即 $n\%>1$

- Percent change?

- 问A比B多10%是否= B比A少10%?

Percent $n\%=n/100$

$N\%>100\%$ 即 $n\%>1$

Percent change?

问A比B多10%是否= B比A少10%?

Arithmetic 数理部分-digit

- Decimals and Scientific notation

In the decimal system, the position of the period or decimal point determines the place value of the *digits*.

For example 7,654.321

7 Thousands	7×1000
6 hundreds	6×100
5 tens	5×10
4 ones or units	4×1
. Decimal point	.
3 tenths	$3 \times 1/10$
2 hundredths	$2 \times 1/100$
1 thousandths	$1 \times 1/1000$

Digit 考点模型

- GMAT 中 数位的表达:
- abc 是一个三位数
- 则 $abc=100a+10b+c$

例题

abc 是一个3位数 求 $abc- cba=?$

1: $a=9$

2: $a-c=3$

【解释】

$Abc=100a+10b+c$

$Cba=100c+10b+a$

$Abc-cba=100(a-c)+(c-a)$

1 NS

2 S

【B】

例题

- 一个两位数 问是不是odd?
- 1) 各位数之和是prime number
- 2) 各位数是prime number

【解释】

1→11是奇数, 12是偶数→NS

2→22是偶数, 23是奇数→NS

1+2→23是奇数, 32是偶数→NS

【答案】E

课前测试题

If $10^{50} - 74$ is written as an integer in base 10 notation, what is the sum of the digits in that integer?

- A. 424
- B. 433
- C. 440
- D. 449
- E. 467

Arithmetic—实数 & 绝对值

- Real number
- Number line

可以在数轴上表示出来的数都是real number.

性质: 如果不是0的实数 非正即负。

- Absolute value: 在数轴上的距离。

Real number的性质

- $x+y=y+x$ and $xy=yx$
- $(x+y)+z=x+(y+z)$
- $xy+xz=x(y+z)$
- 如果 x, y 都是正数 or 都是负数, 那么 xy 乘积是正数。
- 如果 xy 是一正一负 那么 xy 乘积是负数。
- If $xy=0$, then $x=0$ or $y=0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

Arithmetic 数理部分 - 统计

- Descriptive statistics
 - Arithmetic mean or average 算术平均数
 - Geometric average 几何平均数
 - Median 中数
 - Mode 众数
 - Range 极差 值域; the difference between the greatest measurement and the smallest measurement.
 - Standard deviation 标准方差

The average (arithmetic mean) of a professor's salary at University M is s . Is the average salary of a professor at University D at least 25 percent higher than that for a professor at University M?

1. At University M, the budget allocates \$3,500,000 for faculty remuneration.
2. At University D, the budget allocates \$6,000,000 for faculty's salaries.

Remuneration 报酬 工资 salary

1 mean 未知

2 mean 未知

1+2 NS

E

例题1

- DS: 有5个班，其中4个的人数为19、19、20、20，问第5个班有多少人？
- 1) 5个班人数Range为2
- 2) Arithmetic Mean 大于19

【解释】

1→可能是18或21→NS

2→ $x+19+19+20+20>5*19$ $x>16$ →NS

1+2→NS

【答案】E

例题2 出题模板

- DS 三个A B C人，平均身高170，问median?
1)A:165
2)B:170

【解释】

1→NS

2→平均数为170，另两个一定一个大于B，一个小于B，中位数是B→S

【答案】B

Standard deviation 专题

$$\text{deviation} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

SD模型1

- 考公式
已知set A 求standard deviation?
1 :average=3
2 :range=1

【解释】

求SD 需要知道每个数据是多少

1NS

2NS

1+2NS

【E】

SD 模型2

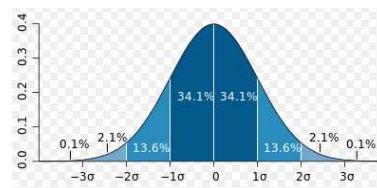
- 考变化
Set A {a, b, c, d, e}的Standard deviation is a. And every subject in Set B are 3 more than Set A, what is the Standard deviation of B?

集合的每个数据+一个常数 SD 不变

* 集合的每个数据乘以一个常数，SD 乘以一个常数

SD 模型3

- 考图像



新增考点 与range的关系

- Range $\geq$ standard deviation

Algebra代数部分

Algebra 考点汇总

- Unknown quantity or variable 未知数
- 1 simplifying algebraic expressions.化简
- 2 equations 方程
 - 2.1 linear equations with one unknown.
 - 2.2 two linear equations with two unknown.
 - 2.3 equations by factoring . (因式分解法)
 - 2.4 quadratic equations 二次方程。(十字相乘法, 公式法)

Algebra 函数化简必背公式

- (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- (2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- (3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- (4) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- (5) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- (6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
- (7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
- (8) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

- a) 提取公因式法
- b) 运用公式法
- c) 分组分解法

What is the remainder when the positive integer n is divided by the positive integer k , where $k > 1$?

(1) $n = (k+1)^3$

(2) $k = 5$

1 $\rightarrow n = (k+1)^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$, $k > 1$, 1 为余数
2 $\rightarrow$ 未知 NS
A

$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$?
 xy , is

(1) $xy = 5$

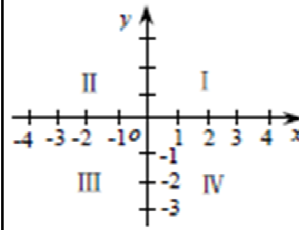
(2) $x^2 + y^2 = 5xy$

594
625

课前作业题

- ☐ A $\left(1 - \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{25}\right)$
☐ B $\left(1 - \frac{1}{100}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)$
☐ C $\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{10}\right)$
☐ D $\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)$
☐ E I

Algebra 平面直角坐标系



• 坐标平面内的点的对称性 坐标系中若某一点的坐标为(a, b), 则

此点:

- A. 关于直线 $y = x$ 对称的点的坐标为(b, a);
 B. 关于直线 $y = -x$ 对称的点的坐标为(-b, -a);
 C. 关于 x 轴对称的点的坐标为(a, -b);
 关于 y 轴对称的点的坐标为(-a, b);
 D. 提示: 若两点关于某条直线对称, 则这两点的连线被这条直线垂直平分

Equations一元线性方程

概念:

一元线性回归方程反映一个因变量与一个自变量之间的线性关系

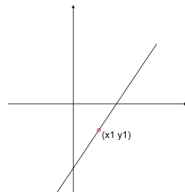
$$Y = ax + b$$

- b代表和轴截距 即当x=0时 y=b 注意: 截距有正负 当y=0时 $x = -b/a$ 与x轴截距。

确定斜率: 已知两点坐标 (a,b) (c,d)

$$K = (d-b)/(c-a)$$

斜率 > 0 直线向上, 斜率 < 0 直线向下 斜率=0 直线垂直于y轴



模型1

- 两点求一条直线

已知点 (1,10) 和点 (3,30) 求直线的方程

第一步: 求K值 用 $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$
 $k = 20/2 = 10$

第二步: 带入k 和其中一个点到 $y = kx + b$ 中 求b
 $10 = 10 \cdot 1 + b \quad b = 0$

得到直线方程 $y = 10x$

模型2

- 线与线的关系
- 已知L1的方程 $y = kx + b$ 和直线L2的垂直于某交点, 求L2的方程
- E.g. L1 L2垂直, L1: $y = 2x + 3$ 两直线交于点 (1,5) 求L2方程

第一步: 求K
 因为 L1 L2 垂直 $k_1 k_2 = -1$ 如果是平行就是相等
 $K_2 = -1/2$

第二步的带入点坐标到 $y = kx + b$ 求b
 $5 = -1/2 \times 1 + b \quad b = 5.5$
 得到直线方程: $y = -0.5x + 5.5$

模型3

- 线的走势

问在坐标轴内, 是否经过某个象限 通过 $y = kx + b$ 的性质来确定

比如 $k < 0 \quad b > 0$ 经过1 2 3 象限
 $k < 0 \quad b < 0$ 经过2 3 4 象限。

Equations多元一次方程（二元一次方程）

对二元一次方程组解一般采用消元法，如下述

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

方程①变为 $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$ 将 x 代入②式

中，从而求得 y ，再将 y 代入①或②式中求得 x ，但需注意以下几点：

(1) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 则此时①、②方程

为等价方程，方程组有无数解。

(2) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ 则此时①、②方程

为矛盾方程，方程组无解。

(3) 若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ 方程组有惟一解。

- 1 减少未知数的个数
- 2 变成一元一次方程计算

模型考点1

买 a, b 两个东西，求 a, b 的单价？

1) 买了3个 a 和4个 b 是34刀

2) 买了6个 a 和8个 b 是78刀

【解释】

1 $\rightarrow 3a + 4b = 34$ ，一个方程两个未知数

$\rightarrow NS$

2 $\rightarrow 6a + 8b = 78 \rightarrow NS$

1+2 $\rightarrow$ 其实是一个方程 $\rightarrow NS$

【答案】E

Equations一元二次方程

一元二次方程的通式是

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0).$$

• 一元二次方程常见的解法包括因式分解法和求根法。

(1) 因式分解法（十字相乘法）

若一元二次方程能够变为以下形式： $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ 则方程的解为 $x = x_1$ 或 $x = x_2$

(2) 公式法

Equations一元二次方程

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0)$$

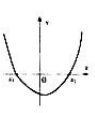
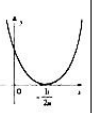
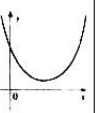
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

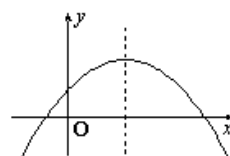
在 $\Delta > 0$ 时有两个不相等的实数根；

在 $\Delta = 0$ 时有两个相等的实数根；

在 $\Delta < 0$ 时没有实数根。

一元二次方程 $a > 0$ 时

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$\emptyset$

一元二次方程 $a < 0$ 时

Equations一元二次方程

两个解与系数的关系

如果 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个根是 x_1, x_2 , 那么:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

如果方程为 $x^2+px+q=0$, 则:

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$$

例题 做题方法篇 数型结合

• $y=n^2-8n+12$, n 的取值范围是 $(0, 10)$, 问能让 y 小于 0 的 n 有几个?

【解释】

$Y=0$ 时 $n=2$ 或 6

即 y 是开口向上, 与 x 轴交点为 2 和 6 的抛物线

$Y<0$ 的 n 为 $(2, 6)$, 即 $3, 4, 5$

【答案】3个

例题

问 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴是否有两个交点?

1) $a>0$

2) $c=-3$

【解释】 $\Delta=b^2-4ac>0$

1 $\rightarrow$ 不可确定 Δ 的正负 $\rightarrow$ NS

2 $\rightarrow$ NS

1+2 $\rightarrow b^2 \geq 0, -4ac=12a>0 \quad b^2-4ac>0$ 与 x 轴有两个交点

$\rightarrow$ S

【答案】C

THX!

请大家课后把课上题目重新整理

并完成习题02的内容