

小树老师的数学课2.2

Set

排列组合

概率

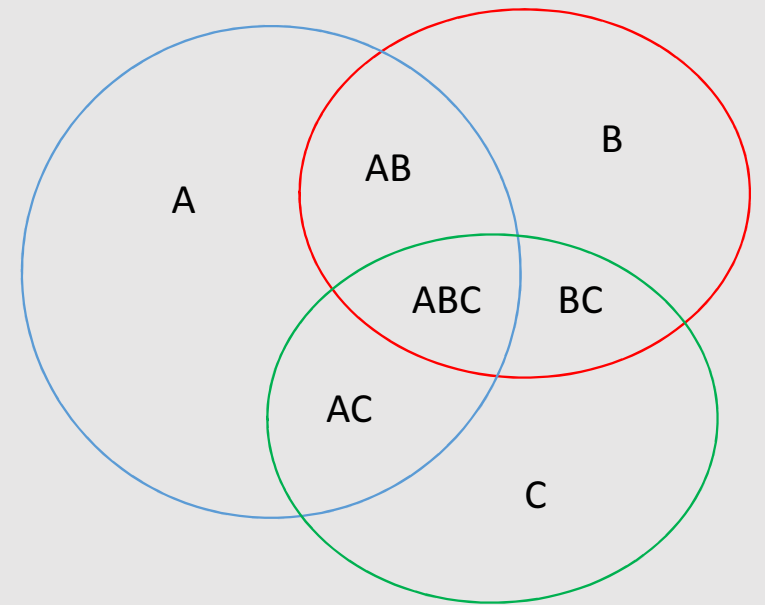
Sets

题干表述中出现两者分类，两类分类 或者多者分类的题目。

韦恩图

韦恩图 模型

- 三者分类的时候 除了韦恩图 可以用字母的推理方法
- 比如 A B C 三个类别
- A , B , C 分别代表 only A only B only C
- AB AC BC 代表both AB both AC both BC
- ABC 代表了三者都的部分。



表格法模型

适用范围 2者分类的情况

	A	非A	
B	Both A and B	only B	B
非B	Only A	Neither A nor B	T-b
	A	T-A	T

例题1

In a survey, 2,500 executives were each asked whether they read Newsletter A or Newsletter B. According to the survey, 55 percent of the executives read Newsletter A, 62 percent read Newsletter B, and 37 percent read both Newsletter A and Newsletter B. How many of the executives surveyed read neither Newsletter A nor Newsletter B?

- A. 425
- B. 500
- C. 600
- D. 675
- E. 750

	B	Not B	tatol
A	$37\% \times 2500$		$55\% \times 2500$
not A		?	
total	$62\% \times 2500$		2500

$$55\% - 37\% = 18\% \quad \text{AnotB}$$

$$\text{Total not B} = (100 - 62)\% = 38\%$$

$$\text{NotA and not B} = 20\% \quad \text{成绩} 2500 = 500 \quad \text{B}$$

排列组合

- 普遍的三种拎不清
- 1 是两者相加 还是相乘
- 2 是用排列还是组合
- 3 概率是排列组合还是就是概率

排列组合算法由来

- Counting methods

If an object is to be chosen from a set of m objects and a second object is to be chosen from a different set of n objects, then there are mn ways of choosing both objects simultaneously.

阶乘

- Factorial

If n is an integer, greater than 1, then n factorial, denoted by the symbol $n!$, is defined as the product of all the integer from 1 to n .
therefore, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3!$ Etc.

排列组合计算公式

- The number of possible complete selections of k objects is called the number of *Combinations* of n objects taken k at a time and is denoted by

$$\binom{n}{k}$$

-

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = C_n^{n-k}$$

排列组合

- A 分类计数原理

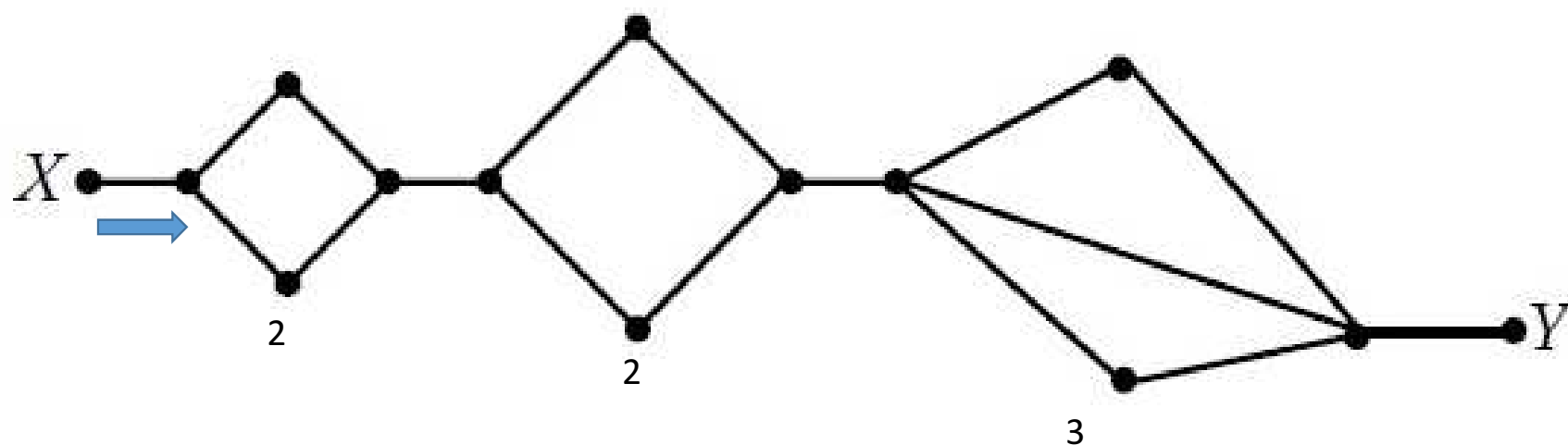
→ 相加关系

- B 分步计数原理

- → 相乘关系

The diagram above shows the various paths along which a mouse can travel from point X, where it is released, to point Y, where it is rewarded with a food pellet. How many different paths from X to Y can the mouse take if it goes directly from X to Y without retracing any point along a path?

- ☐ A 6
- ☐ B 7
- ☐ C 12
- ☐ D 14
- ☐ E 17



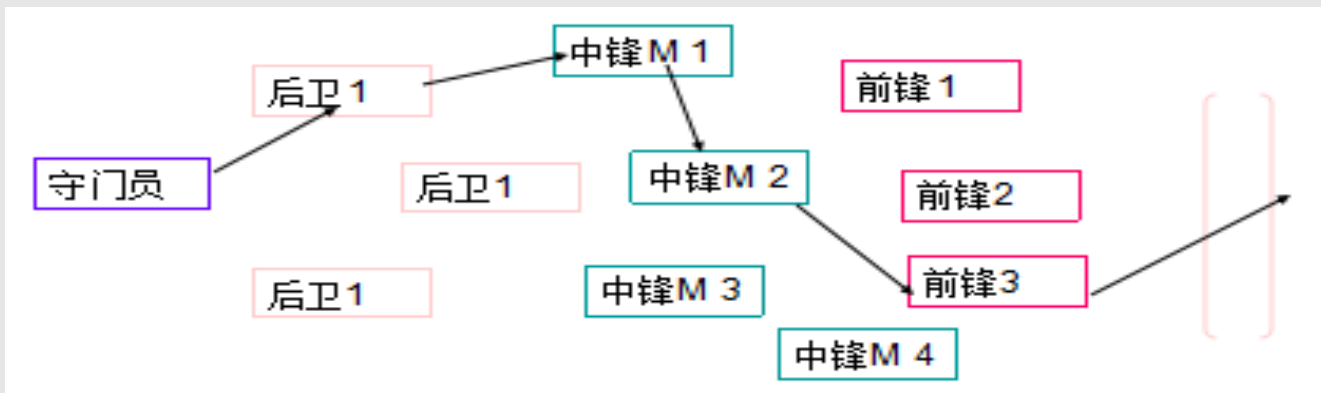
$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

例题

- 从守门员K（一个）传球到后卫B（3个）中任意一个，B再传给中锋M（4个人）中的任意一个，M再将球转给剩下的3个M中任意一个，M再传给三个前锋S任意一个，S再射门 问一共有多少种？.

【解释】

$$1 \times 3 \times 4 \times 3 \times 3 = 108$$



排列组合

- 1 排列 【A】
 - 不同顺序导致结果不同，有序关系。根据题目细节确定排列的 something，按要求进行排列
 - 把有差别的东东放在有差别的空缺里
- 组合 【C】
 - 确定是否有序，根据题干描述细心考虑可能的组合
 - 从几个元素中选取几个元素

排列组合

- 首先 判断顺序问题是否对结果产生影响
- 其次 判断计算过程分类是否有重复

分类 → 每一类的计算 → 类之间的关系

例题

- 给了4个数，0.2.3.4 组成一个四位数，有多少种组合？

首位不能是0，占位解法

3选1，3选1，2选1,1

之间的关系是？

答案 18

例题

- 一个公司有6个department, 每个department最多分到一台电脑, 有两个A牌子, 3个B牌子, 求有多少种不同的分法?

$$C_6^2 \times C_4^3 = 60 \text{ 种}$$

例题

- Each person at a party shook hands exactly once with each of the other people at the party. There was a total of 21 handshakes exchanged at the party. What is the number of people at the party?
- A 5
- B 6
- C 7
- D 8
- E 9

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

带入 n=7时 $7 \times 6 / 2 = 21$

N=7 C

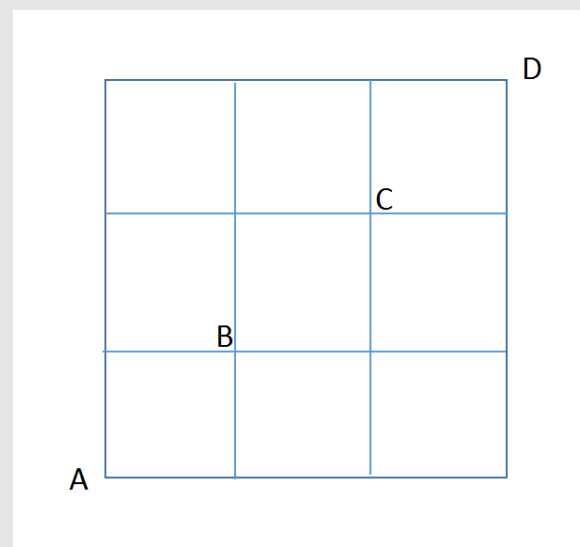
例题

- 从A到D,必须要经过BC, 问有几种走法?

【解释】

A到B有2种走法, B到C有2种走法, C到D有2种走法
A到D有 $2*2*2=8$ 种

【答案】 8



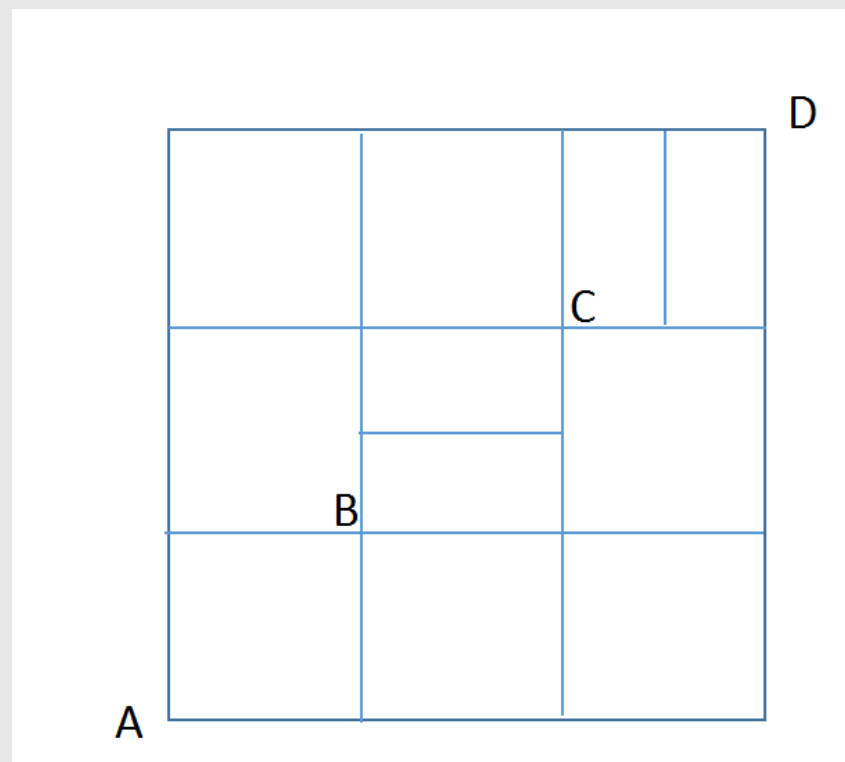
例题

从A到D，必须要经过BC，只能向东或北方向走，问有几种走法？

【解释】

A到B有2种，B到C有3种，C到D有3种走法
A到D有 $2 \times 3 \times 3 = 18$ 种走法

【答案】 18



排列组合常考模型

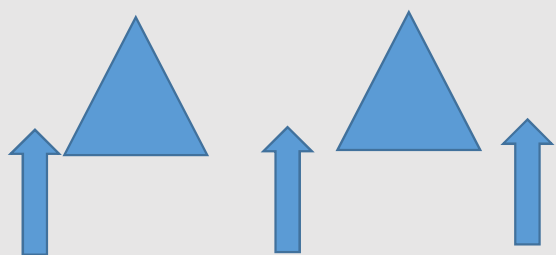
- 圆桌排序
- 6个人围在圆桌上吃饭，问有多少种不同的坐法？

$$A_{66} \div 6 = 5!$$

N个人坐在圆桌吃饭，坐法就是 $(n-1)!$

排列组合常用方法

- 插空法
- 2个男生 3个女生 站成一排，问女生不能互相挨着时 有多少种排列的方法？



$$A_{22} * A_{33} = 12 \text{种}$$

例题

- **【排列组合】 PS:** 有5个人要排队其中有两个人必须中间间隔至少1个人，问几种排法？

【解释】

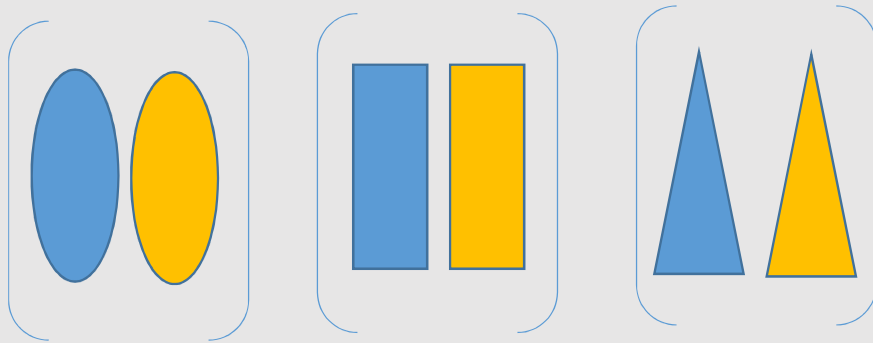
全排列-两个人挨着的情况= $A_{55}-A_{44}=5! - 4! = 4! \times (5-1)$

$=24 \times 4 = 96$

【答案】 96

排列组合常用方法

- 捆绑法
- 三对双胞胎，站成一排拍照，问双胞胎要站在一起的情况有多少种？



- A33 三对排序

And $\times$ 内部顺序 A22 A22 A22

$\rightarrow A_{33} \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ 种

例子

- **【排列组合】**：ABCDEF六个人排序，ABC必须挨着，但不一定是ABC的顺序，ABC和ACB是不同的情况。问总共几种排列方式？

【解释】

把ABC想捆绑 当做一个人，和剩下DEF 三者全排列 A_4^4

然后ABC的位置可以互换 A_3^3

排列方式 $= 4! \times 3! = 144$

【答案】 144

概率性质

- Discrete probability
- 概率就是用来表示随机事件发生的可能性大小的量

$$p = \frac{\text{outcomes}}{\text{total | possible | outcomes}}$$

- 必然发生的事件 概率是1（100%）
- 必然不发生的事件的概率是0

概率

- 求概率还是求数量？

What or what's the probability of....?

概率就是用来表示随机事件发生的可能性大小的量

概率

- 相互独立事件发生的概率：
- 第一个事件发生不影响第二个事件发生，用and表达
- 如果事件相互独立，那么n个事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率的积
- 即 $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$

概率

- 等可能性事件的概率

- 如果一次实验中共有 n 种可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果又 m 种，那么事件 A 的概率 $P(A)=m/n$

- 互斥事件事件的概率

- 两个事件不能同时发生 用or 表达
- 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥，那么事件 $A_1, A_2 \dots A_n$ 中有一个发生的概率为这 n 个事件分别发生概率的和
- 即 $(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

例题

- A jar contains only x black balls and y white balls. One ball is drawn randomly from the jar and is not replaced. A second ball is then drawn randomly from the jar. What is the probability that the first ball drawn is black and the second ball drawn is white?
- A $[x/(x+y)][x/(x+y)]$
- B $[x/(x+y)][(x-1)/(x+y-1)]$
- C $xy/(x+y)$
- D $[(x-1)/(x+y)][(y-1)/(x+y)]$
- E $[x/(x+y)][y/(x+y-1)]$

例题

- **【概率】** DS: A和B是两个independent的事件, 问A和B同时发生的概率是否小于0.4?
- A发生的概率是0.35.
- B不发生的概率是0.61

【解释】 AB同时发生概率=A发生概率*B发生概率

1→B发生的概率 ≤ 1 , AB发生概率 $\leq 0.35*1 < 0.4 \rightarrow S$

2→B发生的概率为 $1-0.61=0.39$, A发生概率 ≤ 1 , AB发生概率 $\leq 0.39 < 0.4 \rightarrow S$

【答案】 D

例题

【概率】DS：大概是说 e 发生可能性0.6， G发生可能性0.45， 问eg同时发生可能性？

1: e g 是独立的事件

2: eg同时不发生是0.22

【解释】

1→概率= 0.6×0.45 S

2→假设是独立事件，不发生是0.4 and 0.55 $0.4 \times 0.55 = 0.22$

正好相等，说明是独立事件。同时发生同理条件1 S

【答案】D

例题

- If an integer n is to be chosen at random from the integers 1 to 96, inclusive, what is the probability that $n(n + 1)(n + 2)$ will be divisible by 8?

- A. $1/4$
- B. $3/8$
- C. $1/2$
- D. $5/8$
- E. $3/4$

n $n+1$ $n+2$ 连续三个数相乘

特征是 奇数偶数 奇数 偶数奇数偶数 两种

偶数奇数偶数的时候 一定可以整除8 因为两个偶数一定是一个是2的倍数 一个是4的倍数

也就是 n 是偶数时候都符合

48个 偶数

奇数偶数奇数的时候 两个奇数都不含有2 也就是8 完全要由中间的偶数提供

因此对应的只有 $(n+1) = 8 \times 1$ 到 8×12 一共12个数

总数符合60个

$60/96 = 5/8$

抛硬币模型

- 抛硬币模型
- 抛三次硬币，问at least 有一次是正面的概率是多少？

$$1 - \text{三次都是反面的概率} = 1 - 1/2 * 1/2 * 1/2 = 7/8$$

两个报警器，A的报警率是0.9，B的报警率是0.95，问至少有一个报警器work的概率

【解释】

至少有一个报警的对立事件是两个都不报警

$$1 - 0.1 * 0.05 = 0.995$$

【答案】 0.995

感谢大家参加本周课程

- 课后完成 选听录播课，
- 习题3 习题4 已经录播课内容