GMAT 数学论坛精华帖总结

By Angelo

标准方差的总结

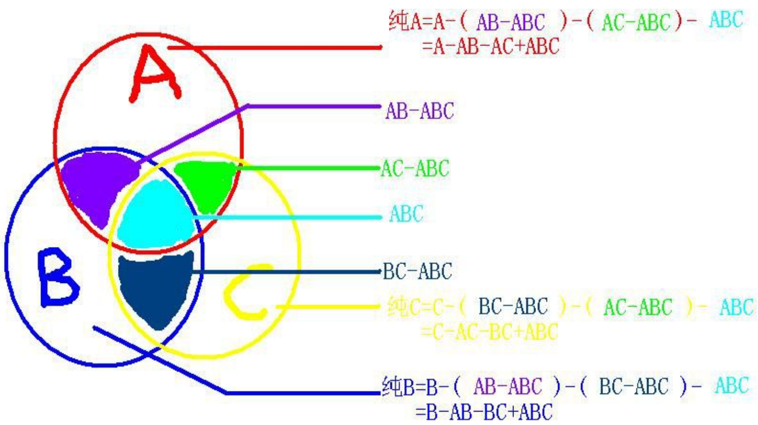
标准方差的计算公式是：
每一个数与这个数列的平均值的差的平方和，除以这个数列的项数，再开根号！！！

分析：
标准方差主要和分母（项数）、分之（偏差）有直接关系！！！
这里的偏差为每一个数与平均值的差。

几个适用的理解：
1.数据分布离平均值越近，标准方差越小；数据分布离平均值越远，标准方差越大。
2.标准方差为 0，意味着数列中每一个数都相等。
3.序列中每一个数都加上一个常数，标准方差保持不变的！！！

通项问题一招搞定

看到过一堆堆问通项如何求的帖子啦，这里说一个一招搞定的做法：
通项 S，形式设为 S=Am+B，一个乘法因式加一个常量
系数 A 必为两小通项因式系数的最小公倍数
常量 B 应该是两个小通项相等时的最小数，也就是最小值的 S
例题：4－JJ78(三月 84).ds 某数除 7 余 3，除 4 余 2，求值。
解：设通项 S=Am+B。由题目可知，必同时满足 S=7a+3=4b+2
A 同时可被 7 和 4 整除，为 28（若是 S＝6a+3=4b+2，则 A＝12）
B 为 7a+3=4b+2 的最小值，为 10（a=1.b=2 时，S 有最小值 10）
所以 S＝28m＋10
满足这两个条件得出的通项公式，必定同时满足两个小通项。如果不能理解的话，就记住这个方法吧，此类的求通项的问题就能全部，一招搞定啦



整除和余数的一些概念

被 2，4，8 整除的特点：

譬如说一个数 3472，要知道被 2 整除余几，就看最后一位 2 除以 2，余几原数 3472 被 2 除就余几，能整除则原数也能整除；被 4 除时，要看后两位 72 被 4 除余几，原数被 4 除就余几，能整除则原数也能整除；被 8 除时，要看最后 3 位 472 被 8 除余几，原数被 8 除就余几，能整除则原数也能被 8 整除

被 3，9 整除的特点：

还是举一个例子，3472，把这个数每一位都加起来：3＋4＋7＋2＝16，1＋6＝7，加完以后得的数除以 3 余几，原数除以 3 就余几，如果能整除则原数也能被 3 整除；加完后的数被 9 除余几，原数被 9 除就余几。

被 6 除时：

分别考虑被 2，和被 3 除时的情况

被 5 除时：

一个数最后一位除以 5 余几，原数被 5 除就余几

被 11 除时：

错位相加再相减。譬如说 3472 错位相加再相减的过程就是（3＋7＋1）－（4＋2）＝5

最后一位数 5 去除以 11，能整除则原数 3472 就可以被整除，如果不能整除则原数不能被 11 整除。

如何凑数？

例子：一个数 n 被 3 除余 1，被 4 除余 2，被 5 除余 1，问被 60 除余几？

凑数的原则：（1）从最小数开始；（2）凑后边时要保证前面已经满足的不变化。

（1）从 3 开始，最小为 1：1

（2）保证它的情况下凑被 4 除余 2：当然每次就要加 3，加 3 这么加上去得 1＋3＋3＋3＝10，10 被 4 除余 2

（3）在保证前面的情况下凑被 5 除余 1：在 10 的基础上每次加上 3 和 4 的最小公倍数 12，得（1＋3＋3＋3）＋12＋12＋12＝46，此时 46 被 5 除余 1

（4）检查一下，46 能被 3 除余 1，被 4 除余 2，被 5 除余 1。用 46 除以 60 就得到余数

5。幂得尾数循环特征

比如说 3333ˆ7777 和 7777ˆ3333 比，最后一位谁最大？其实这类问题只和个位数有关。这个问题可以被理解成为 3ˆ7777 和 7ˆ3333 比，最后一位是怎么比得的。

每一个数它的 n 次方都是 4 个 4 个循环的：

个位数是 1 的 n 次方尾数循环是：1111 1111 1111 1111....

个位数是 2 的 n 次方的尾数循环为：2468 2468 2468 2468....

个位数是 3 的 n 次方的尾数循环为：3971 3971 3971 3971....

个位数是 4 的 n 次方的尾数循环为：4646 4646 4646 4646....

个位数是 5 的 n 次方的尾数循环为：5555 5555 5555 5555....

个位数是 6 的 n 次方的尾数循环为：6666 6666 6666 6666....

个位数是 7 的 n 次方的尾数循环为：7931 7931 7931 7931....

个位数是 8 的 n 次方的尾数循环为：8426 8426 8426 8426....

个位数是 9 的 n 次方的尾数循环为：9191 9191 9191 9191....

在这道题中，把 7777 的最后两位除以 4，余数是 1，我们就知道是 3 的尾数循环的第一位，也就是 3。换句话说 3333ˆ7777 的最后一位就是 3
把 3333 的最后两位除以 4，余 1，所以就知道 7 的尾数循环第一位，是 7，所以 7777ˆ3333 最后一位

就是 7。

整除---- 分赃就要平均！

整除的定义　　整除：若整数“a” 除以大于 0 的整数“b”，商为整数，且余数为零。 我们就说 a 能被 b 整除（或说 b 能整除 a），记作 b|a，读作“b 整除 a”或“a 能被 b 整除”．它与除尽既有区别又有联系．除尽是指数 a 除以数 b（b≠0）所得的商是整数或有限小数而余数是零时，我们就说 a 能被 b 除尽（或说 b 能除尽 a）．因此整除与除尽的区别是，整除只有当被除数、除数以及商都是整数，而余数是零．除尽并不局限于整数范围内，被除数、除数以及商可以是整数，也可以是有限小数，只要余数是零就可以了．它们之间的联系就是整除是除尽的特殊情况．

注：a or b 作除数的其一为 0 则不叫整除

整除的一些性质为：

（1）如果 a 与 b 都能被 c 整除，那么 a+b 与 a-b 也能被 c 整除．

（2）如果 a 能被 b 整除，c 是任意整数，那么积 ac 也能被 b 整除．

（3）如果 a 同时被 b 与 c 整除，并且 b 与 c 互质，那么 a 一定能被积 bc 整除．反过来也成立．

有关整除的一些概念：

整除有下列基本性质：

①若 a｜b，a｜c，则 a｜b±c。

②若 a｜b，则对任意 c，a｜bc。

③对任意 a，±1｜a，±a｜a。

④若 a｜b，b｜a，则｜a｜＝｜b｜。

对任意整数 a，b，b＞0，存在唯一的整数 q，r，使 a＝bq＋r，其中 0≤r＜b，这个事实称为带余除法定理，是整除理论的基础。

若 c｜a，c｜b，则称 c 是 a，b 的公因数。若 d 是 a，b 的公因数，且 d 可被 a，b 的任意公因数整除则称 d 是 a，b 的最大公因数。当 d≥0 时，d 是 a，b 公因数中最大者。若 a，b 的最大公因数等于 1，则称 a，b 互素。累次利用带余除法可以求出 a，b 的最大公因数，这种方法常称为辗转相除法。又称欧几里得算法。

整除的规律　　整除规则第一条（1）：任何数都能被 1 整除。

整除规则第二条（2）：个位上是 2、4、6、8、0 的数都能被 2 整除。

整除规则第三条（3）：每一位上数字之和能被 3 整除，那么这个数就能被 3 整除。

整除规则第四条（4）：最后两位能被 4 整除的数，这个数就能被 4 整除。

整除规则第五条（5）：个位上是 0 或 5 的数都能被 5 整除。

整除规则第六条（6）：一个数只要能同时被 2 和 3 整除，那么这个数就能被 6 整除。

整除规则第七条（7）：把个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。

整除规则第八条（8）：最后三位能被 8 整除的数，这个数就能被 8 整除。

整除规则第九条（9）：每一位上数字之和能被 9 整除，那么这个数就能被 9 整除。

整除规则第十条（10）： 若一个整数的末位是 0，则这个数能被 10 整除

GMAT 数学希望满分的 XDJM 请进

首先：数学满分不一定在于数学水平多高
其次：不一定在于会多少题，而在于能做对多少题

TRICK 点：

1、度量单位不一样，每个数字指代的对象有差别，通常英制的会给出换算，但公制的如厘米，米不会给出换算。另外是时间的换算，今天考到一个类似三个管抽水和放水的题，给的条件是小时，问的是分钟，还有就是半径和直径不要弄错，注意一点：半径的周长=半圆+直径，而不只是半圆，本月 JJ 有一道这样的题。

2、PS 题：是求比率，还是求数值要看清；比率的话要看问题是“谁和谁的比率”

3、关于打折是打掉的部分还是折后价要看清。

4、题目经常有隐含条件，如：integer，consecutive，different，nonzero 等，任何一个条件都要看到。

5、DS 题：不求解值，只看能否求出。DS 题尤其注意，当准备选 C 的时候，一定看看 B 是否单独充分。

6、有时候计算不困难，但要看清楚问题，今天还考到一个，是三个人走的距离，一元一次方程，很容易，但要看清楚问题问的是哪个人走的，因为从列式子的角度来讲，都会设第一个为 X，而最后问的是第三人走的距离。

7、关于零，正负号的问题一定不要漏掉，还有就是末位数字的 1，5，6，这时一定要考虑零——CD 网的管理员，你不想着他，ZEROS 就让你得不了高分（这难道是天意？）

8、注意题目暗含的条件，这里会用到常识，为什么叫（problem solving）其实 GMAT 已经把解题思路给你了。有些题单纯从数学角度来讲是一种解，但从解决生活问题来讲又会有解，比如人的分配，卖汽车，都不会有分数，有整数解就行。还有就是树的影子问题，这暗含的条件就是相似三角形。

9、关于整数条件的给出。和上面那条相反，这一类题千万不要自加条件。有时候要看清题是否提到了整数，如果没说整数，一定不要认为这就是整数，即使给你的条件也是整数。而且这种题往往容易考到中位数（MEDIAN）（本月机经中一道类似的，3/5/6/7/9/X，其实这题很善良了，用整数也能算出多个可能）

10、现在比取值范围大小的题很多，如果试数的话，一定考虑-1，0，1 分开的这些区间，千万不要只考虑大于 0 和小于 0，因为很多都是分数的比较。

最后作题注意：当你要按 CONFIRM 键之前，一定再看最后一眼，我不论是模考还是真考，每套题总有 3 个题左右，在看了最后一眼后把错误改了过来。（这是觉得这对 50 分和 51 分的区别有时是决定性作用）

目前想到这些，如有再加。祝大家考好！

关于 GMAT 数学中 divide， divisible 美国大学教案的解释

if the remainder of dividing y by x is 0 then we can say:x divides y
y is divisible by x
x is a factor of y
x is a divisor of y
y is a multiple of x
y is divisible by x
他们都是 Y/X
在做数学的时候大伙可一定注意呀～

一元二次方程根的判别式的综合应用

之前做讨论稿的时候提到过下边这份资料，是以前弄百度知道团的时候找的，不是我原创的，不过个人感觉整理的还不错，发上来跟大家共享一下。

一、知识要点：

1.一元二次方程 ax2+bx+c=0(a≠0)的根的判别式Δ=b2-4ac。

定理 1　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，Δ＞0 方程有两个不等实数根

定理 2　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，Δ=0 方程有两个相等实数根

定理 3　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，Δ＜0 方程没有实数根

2、根的判别式逆用（注意：根据课本“反过来也成立”）得到三个定理。

定理 4　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，方程有两个不等实数根Δ＞0

定理 5　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，方程有两个相等实数根Δ＝0

定理 6　ax^2+bx+c=0(a≠0)中，方程没有实数根Δ＜0

注意：（1）再次强调：根的判别式是指Δ=b2-4ac。（2）使用判别式之前一定要先把方程变化为一般形式，以便正确找出 a、b、c 的值。(3)如果说方程有实数根，即应当包括有两个不等实根或有两相等实根两种情况，此时 b2-4ac≥0 切勿丢掉等号。(4)根的判别式 b2-4ac 的使用条件，是在一元二次方程中，而非别的方程中，因此，要注意隐含条件 a≠0

二.根的判别式有以下应用：

不解一元二次方程，判断根的情况。

例 1.　不解方程，判断下列方程的根的情况：

(2)ax^2+bx=0(a≠0)

解：

(2)∵a≠0, ∴方程是一元二次方程，此方程是缺少常数项的不完全的一元二次方程，将常数项视为零，

∵Δ=(-b)2-4·a·

∵无论 b 取任何关数，b2 均为非负数，

∴Δ≥0，　　故方程有两个实数根。

根据方程根的情况，确定待定系数的取值范围。

例 2. k 的何值时？关于 x 的一元二次方程 x2-4x+k-5=0（1）有两个不相等的实数根；（2）有两个相等的实数根；（3）没有实数根；

分析：由判别式定理的逆定理可知（1）Δ＞0；（2）Δ=0；（3）Δ＜0；

解：Δ=(-4)2-4·

（1）∵方程有两个不相等的实数根，

∴Δ＞0，即 36-4k＞0.解得 k＜

（2）∵[!--empirenews.page--]方程有两个不相等的实数根，

∴Δ=0，即 36-4k=0.解得

（3）∵方程有两个不相等的实数根，

∴Δ<0，即 36-4k<0.解得

证明字母系数方程有实数根或无实数根。

例 3. 求证方程(m2+1)x2-2mx+(m2+4)=0 没有实数根。

分析：先求出关于 x 的方程的根的判别式，然后只需说明判别式是一个负数，就证明了该方程没有实数根。

证明：　　$\Delta=-4(m2+2)2$

∵不论 m 取任何实数

∴ $-4(m2+2)2<0$, 即Δ

∴关于 x 的方程(m2+1)x2-2mx+(m2+4)=0 没有实数根。

小结：由上面的证明认清证明的格式归纳出证明的步骤：

（1）计算Δ

（2）用配方法将Δ恒等变形

（3）判断Δ的符号

（4）结论.其中难点是Δ的恒等变形，一般情况下配方后变形后为形如：a2,a2+2,(a2+2)2, -a2, -(a2+2)2 的代数式，从而判定正负，非负等情况。

应用根的判别式判断三角形的形状。

例 4．已知：a、b、c 为ΔABC 的三边，当 m>0 时，关于 x 的方程 c(x2+m)+b(x2-m)-2[!--empirenews.page--]ax=0 有两个相等的实数根。求证ΔABC 为 RtΔ。

(提示：答案为ΔABC 为 RtΔ)

判断当字母的值为何值时，二次三项是完全平方式

例 5、（1）若关于 a 的二次三项式 16a2+ka+25 是一个完全平方式则 k 的值可能是（ ）

（2）若关于 a 的二次三项式 ka2+4a+1 是一个完全平方式则 k 的值可能是（）

分析：可以令二次三项等于 0，若二次三项是完全平方式，则方程有两个相等的实数根。即Δ

解：（1）

∵方程有两个相等的实数根，

∴Δ=k2-4×16×

∴k=+40 或者

（2）

∵方程有两个相等的实数根，∴Δ=16-4k=0　∴

可以判断抛物线与直线有无公共点

例 6:当 m 取什么值时，抛物线与直线 y=x＋2m 只有一个公共点？

解:列方程组消去 y 并整理得

，∵抛物线与直线只有一个交点，

∴Δ＝0，即　4m+5=0　　　∴

说明：直线与抛物线的交点问题也可归纳为方程组的解的问题。

可以判断抛物线与 x 轴有几个交点

分析：抛物线 y=ax2+bx+c 与 x 轴的交点　（１）当 y=0 时，即有 ax2+bx+c=0，要求 x 的值，需解一元二次方程 ax2+bx+c=0。可见，抛物线 y=ax2+bx+c 与 x 轴的交点的个数是由对应的一元二次方程 ax2+bx+c=0 的根的情况确定的,而决定一元二次方程 ax[!--empirenews.page--]2+bx+c=0 的根的情况的，是它的判别式的符号，因此抛物线与 x 轴的交点有如下三种情形：

当时，抛物线与 x 轴有两个交点，若此时一元二次方程 ax2+bx+c=0 的两根为 x1、x2，则抛物线与 x 轴的两个交点坐标为（x1，0）（x2，0）。

当时，抛物线与 x 轴有唯一交点，此时的交点就是抛物线的顶点，其坐标是（）。

当 时，抛物线与 x 轴没有交点。

例 7、判定下列抛物线与 x 轴交点的个数：

（１）　　　（２）　　　（３）

解：（１）Δ＝16-12=4>0　　∴抛物线与 x 轴有两个交点。

（２）Δ＝36-36=0　　　∴抛物线与 x 轴只有一个公共点。

（３）Δ＝4-16=-12<0　∴抛物线与 x 轴无公共点。

例 8、已知抛物线

（１）当 m 取什么值时，抛物线和 x 轴有两个公共点?

（２）当 m 取什么值时，抛物线和 x 轴只有一个公共点？并求出这个公共点的坐标。

（３）当[!--empirenews.page--]m 取什么值时，抛物线和 x 轴没有公共点?

解：令 y=0，则　　Δ＝

(1)∵抛物线与 x 轴有两个公共点，　∴Δ>0，即 － 4m+8>0　　∴

(2)∵抛物线和 x 轴只有一个公共点，　∴Δ＝0，即 －4m+8=0　∴

当 m=2 时，方程可化为，解得 x1=x2= -1，∴抛物线与 x 轴公共点坐标为（-1,0）。

(3)∵抛物线与 x 轴没有公共点，　∴Δ<0，即 －4m+8<0，　∴

∴当 m>2 时，抛物线与 x 轴没有公共点。

利用根的判别式解有关抛物线（Δ>0）与 x 轴两交点间的距离的问题

分析:抛物线 （Δ>0)与 x 轴两交点间的距离，是对应的一元二次方程 [!--empirenews.page--]的两根差的绝对值。它有以下表示方法：

例 9: 求当 a 为何值时?二次函数 图象与 x 轴的两个交点间的距离是 3。

（参考：图象与 x 轴两个交点间的距离是 3）

关于”整除“的一些整理

（1）1 与 0 的特性：

1 是任何整数的约数，即对于任何整数 a，总有 1|a。

0 是任何非零整数的倍数，a≠0，a 为整数，则 a|0。

（2）若一个整数的末位是 0、2、4、6 或 8，则这个数能被 2 整除。

（3）若一个整数的数字和能被 3 整除，则这个整数能被 3 整除。

（4）若一个整数的末尾两位数能被 4 整除，则这个数能被 4 整除。

（5）若一个整数的末位是 0 或 5，则这个数能被 5 整除。

（6）若一个整数能被 2 和 3 整除，则这个数能被 6 整除。

（7）若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。如果差太大或心算不易看出是否 7 的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相减、验差」的过程，直到能清楚判断为止。例如，判断 133 是否 7 的倍数的过程如下：13－3×2＝7，所以 133 是 7 的倍数；又例如判断 6139 是否 7 的倍数的过程如下：613－9×2＝595 ， 59－5×2＝49，所以 6139 是 7 的倍数，余类推。

（8）若一个整数的未尾三位数能被 8 整除，则这个数能被 8 整除。

（9）若一个整数的数字和能被 9 整除，则这个整数能被 9 整除。

（10）若一个整数的末位是 0，则这个数能被 10 整除。

（11）若一个整数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除，则这个数能被 11 整除。11 的倍数检验法也可用上述检查 7 的「割尾法」处理！过程唯一不同的是：倍数不是 2 而是 1！

（12）若一个整数能被 3 和 4 整除，则这个数能被 12 整除。

（13）若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，加上个位数的 4 倍，如果差是 13 的倍数，则原数能被 13 整除。如果差太大或心算不易看出是否 13 的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相加、验差」的过程，直到能清楚判断为止。

（14）若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 5 倍，如果差是 17 的倍数，则原数能被 17 整除。如果差太大或心算不易看出是否 17 的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相减、验差」的过程，直到能清楚判断为止。
（15）若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，加上个位数的 2 倍，如果差是 19 的倍数，则原数能被 19 整除。如果差太大或心算不易看出是否 19 的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相加、验差」的过程，直到能清楚判断为止。

（16）若一个整数的末三位与 3 倍的前面的隔出数的差能被 17 整除，则这个数能被 17 整除。
（17）若一个整数的末三位与 7 倍的前面的隔出数的差能被 19 整除，则这个数能被 19 整除。
（18）若一个整数的末四位与前面 5 倍的隔出数的差能被 23(或 29)整除，则这个数能被 23 整除。
（19）能被 25 整除的数的后二位数字如果是 25 的倍数，那么这个数就是 25 的倍数。

数学理论的总结

奇偶性：

需要注意的两点：1.负数也有奇偶性。　2. 数字 0 因为能够被 2 整除，所以是偶数。

性质：1.奇数+/-奇数=偶数；偶数+/-偶数=偶数；偶数+/-奇数=奇数；（只要相同就是偶）2.偶数*奇数=偶数；偶数*偶数=偶数；奇数*奇数=奇数(只要有偶就是偶)

质合性：

任何一个大于 2 的偶数都可以表示为两个质数的和。

大于 2 的质数都是奇数，数字 2 是质数中唯一的偶数。

数字 1 既不是质数，也不是合数。

因子和质因子：

任何一个大于 1 的正整数，无论是质数还是合数都可以表示质数因子相乘的形式。

任意一个自然数的因子的个数为质因数分解式中每个质因子的指数加 1 相乘的积。

一个完全平方数的因子个数必然为奇数；反之，任何一个自然数若有奇数个因子，这个自然数必为完全平方数。若它有偶数个因子，则此自然数一定不是完全平方数。

只有 2 个因子的自然数都是质数。

若自然数 N 不是完全平方数，则 N 的因子中小于根号 N 的因子占一半，大于根号 N 的因子也占一半。

若自然数 N 是完全平方数，并且根号 N 也是 N 的一个因子，那么在 N 的所有因子中除去根号 N 之外，小于根号 N 的因子占余下的一半，大于根号 N 的因子也占余下的一半。

如果自然数 N 有 M 个因子，M 为大于 2 的质数，那么 N 必为某一质数的（M-1）次方。

连续性：

如果 N 个连续整数或者连续偶数相加等于零（N 为大于 1 的自然数），则 N 必为奇数。（注意要把 0 算上）

若 N 个连续奇数相加等于零（N 为大于 1 的自然数），则 N 必为偶数。

奇数个连续整数的算术平均值等于这奇数个数中中间那个数的值。

偶数个连续整数的算术平均值等于这偶数个数中中间两个数的算术平均值。

前 N 个大于 0 的奇数的和为 N^2。

任何两个连续整数中，一定是一奇一偶，它们的乘积必定为偶数。

任何三个连续整数中，恰好一个数是 3 的倍数，并且这三个连续整数之积能够被 6 整除。

若三个连续的自然数的算术平均值为奇数，则这三个自然数的乘积必为 8 的倍数。

若三个连续的自然数的算术平均值为奇数，则这三个自然数的乘积必为 24 的倍数。

数的开方和乘方：

a^n means the nth power of a.

自然数 N 次幂的尾数循环特征：尾数为 2 的数的幂的个位数一定以 2，4，8，6 循环；尾数为 3 的数的幂的个位数一定以 3，9，7，1 循环；尾数为 4 的数的幂的个位数一定以 4，6 循环；尾数为 7 的数的幂的个位数一定以 7，9，3，1 循环；尾数为 8 的数的幂的个位数一定以 8，4，2，6 循环；尾数为 9 的数的幂的个位数一定以 9，1 循环。

整除特性：能够被 2 整除的数其个位一定是偶数；能够被 3 整除的数是各位数的和能够被 3 整除;能够被 4 整除的数是最后两位数能够被 4 整除；能够被 5 整除的数的个位是 0 或 5；能够被 8 整除的数是最后三位能够被 8 整除；能够被 9 整除的数是各位数的和能够被 9 整除；能够被 11 整除的数是其奇数位的和减去偶数位的和的差值可以被 11 整除；（记住：一个数要想被另一个数整除，该数需含有对方所具有的质数因子。）

圆形排列和条形排列总结

先写规律：环形排列与直线排列相比，就相当于少了一个元素。所以可以先求直线排列，再求圆形排列。以下的题都选自以前 jj 里的题

例一、在已有 5 个钥匙的钥匙环中放入 2 个钥匙,这 2 个钥匙相邻的概率？
我的思路：第一种解法：题目可以转化为先将其中一把钥匙 A 放入钥匙链种，这样 key chain 中就有 6 把钥匙了！然后再放另一把钥匙 B，求钥匙 B 和钥匙 A 相邻的概率。六把钥匙六个位置，所以分母是 6（因为是圆）分子要求 B 和 A 相邻的话只有两个位置。所以是 2/6
第二种解法：利用这个规律
本题直线排列是：2C(1,6)/P(2，7)
所以换成环形的话就应该是：2C(1,5)/p(2,6)=2/6
所以本题的答案是 2/6

例二、五个人站成一个圈的那道题：利用规律很容易得 p(4,4)

例三、5 个点（其中有一红点）排成一个圆圈，5 个人 A、B、C、D、E，其中 A 必须站在红点上，问有多少种不同的站法
因为 A 点的位置是固定的，所以我们先排其他 4 个点。按环形排要少一个元素，所以这四个点排成一个圆形的话就是 P(3,3)
他们排好后有 4 个位置可以放 A，所以是 4
因而我认为答案应该是 P(4,4)

例四、6 个盘子，一蓝 5 白，摆成一圈。五种坚果，其中有 N 和 R，别的不知。如果 N 或 R 之一必须放在蓝盘子中，其他盘子各放一个坚果，共有几种摆法。
[确认]：　240
[思路]：2*P(5, 4)=240
首先 6 个盘子 5 白一蓝排成一个圈的排法只有一种，所以只需考虑坚果的方法！
放入蓝盘子的坚果有 N 或 R 所以有两种。
其他五个盘子放 4 中坚果，与要考虑排列所以是 P(5,4)
所以最后答案是 240

独立重复性试验总结

独立重复性试验的特点是：很难搞清顺序
先写规律：第一步：先求出特殊概率。第二步：找到特殊情况和一般情况之间的因子。以下的题目全部选自 jj
例一、投一枚硬币 2n 次，求出现正面 k 次的概率？
第一步：特殊概率，前 k 次出现正面的情况（1/2）^k(1/2)^(2n-k)
第二步：特殊情况和一般情况之间的因子。C(k,2n)
所以答案为 C(k,2n)*（1/2）^k(1/2)^(2n-k)

例二、有 4 组人，每组一男一女，每组中各取一人问取出两难两女的概率？
第一步：前两组取男，后两组取女（1/2）^4
第二步：差的因子 C(2，4)
所以答案为 C(2，4)＊（1/2）^4
例三、一个人投飞彪，击中靶心的概率为 0.7，连续投 4 次飞彪，问有两次击中靶心的概率？
第一步：特殊情况：前两次击中，后两次没击中：（0.7）^2(0.3)^2
第二步：差的因子：C(2,4)
所以答案为 C(2,4)*（0.7）^2(0.3)^2
例四、某种硬币每抛一次正面朝上的概率为 0.6 问连续抛 5 次，至少有 4 次朝上的概率？
有 5 次朝上（0.6）^5
有四次朝上 C(4,5)*0.6^4*0.4
所以答案为（0.6）^5+C(4,5)*0.6^4*0.4

关于 GMAT 数学中求余数问题的一个简单方法

个人建议：在您看这份文档的同时，准备一支笔，一张草稿纸。如果看到例题，跟我的步骤，一步一步地同时写下来，这样比光看屏幕，要理解得更快！

我在自己的讨论稿文档里，求余的时候，都会用到 mod 这个运算符。
mod：模。意思就是求余数。
比如说：5 mod 3=2， 100 mod 11=1
读作：五模三余二，一百模十一余一

这是标准的公式化写法，大家可能不太熟悉，但是知道意思了，其实也很简单。引入 Mod，主要是可以用数学公式来写，而且可以把求余数的问题化简成为普通的四则运算的问题，也比较容易表达。
在讲如何求余之前，先来普及一下余数的一些性质。

首先就是余数的加减法：比如说 100 除以 7 余 2，36 除以 7 余 1。那么 100+36 除以 7 余几呢？或者 100-36 除以 7 余几呢？很显然，只要用 100 除以 7 的余数 2 与 36 除以 7 的余数 1 进行加减就可以得到答案。通过这个例子可以很明显的看出来，余数之间是可以加减的。
总结写成书面的公式的话，就是：(M＋N) mod q=(（M mod q）+（N mod q）) mod q

然后我们再看余数的乘法：我们继续来看上面这个例子，如果要求 100*36 除以 7 的余数是多少，该怎么求呢？
我们不妨来这样做：
100=98+2=7*14+2，36=35+1=7*5+1；
这时 100*36=（7*14+2）（7*5+1）=7*14*7*5 + 2*7*5 + 7*14*1 + 2*1
很明显，100*36 除以 7 的余数就等于 2*1=2
于是我们可以得出这样的一个结论：求 M*N 除以 q 的余数，就等于 M 除以 q 的余数 乘以 N 除以 q 的余数。

类似的，如果是求 N^m 除以 q 的余数呢？只要我们将 N^m=N*N*N*...*N，也就是说分别地用每个 N

除以 q 的余数相乘，一共 m 个，得出的结果再对 q 求余数，即可求出结果。

举例来说：求 11^4 除以 9 的余数。化成公式即是：11^4 mod 9=?
11^4 mod 9 = (9+2)^4 mod 9 = 2^4 mod 9 =16 mod 9 = 7

于是我们可以总结出这样的公式：
M*N mod q=（M mod q）*（N mod q） mod q
（ M^n mod q = （M mod q）^n mod q ）

那么，我们知道了这些性质之后对解题又有什么帮助呢？

As we all know，如果一个数乘以 1，还是等于原数；而 1 的任意次方，还是等于 1。
所以在解答这一类的问题的时候，只要我们尽量把计算中的余数凑成与 1 相关的乘式，结果显然会好算很多的。（或者-1，2 之类的比较容易进行计算的数字都可以，因题而异。）

举例说明：求 3^11 除以 8 的余数。题目即是：3^11 mod 8=?
  3^11 mod 8
=3^10 * 3^1   （mod 8）
=(3^2)^5*(3^1)   （mod 8）
=9^5 * 3   （mod 8）
=(8+1)^5 * 3   （mod 8）
=1^5 *3   （mod 8）
=3
发现没有，甚至没有去计算什么尾数的规律，答案就算出来了，而且只用了加减乘除。

那么再来看一道题目：求 （2^100）*（3^200） 除以 7 的余数
先化成计算公式：

(2^100)*(3^200)   mod 7
=[2^(3*33 + 1)] * [3^(3*66 + 2)]   mod 7
=[(2^3)^33 * 2] * [(3^3)^66 * 3^2]   mod 7
=(8^33 * 2) * (27^66 * 9)   mod 7
=[(7+1)^33 * 2] * [(28-1)^66 * 9]   mod 7
=(1^33 * 2)* [(-1)^66 * 9]   mod 7
=2*9   mod 7
=4

注意：如果余数有负号，就当做负数一样计算。

我步骤写得很详细，但其实只要是熟练了，基本上只要三四步答案一定就出来了，有没有觉得很简单呢？赶紧找一两题来练练手吧，甚至随便写几个数字来做做试试看，像我上面的例题都是临时编的。

相信只要练习了三四道题目，以后再碰到这样的余数题，就会 会心地一笑：小样，秒掉你！

我做 GMAT 数学的一些小 trick

应我在 CD 的一个好朋友要求，在下把作 GMAT 数学时候的一点心得总结起来说几句，供大家参考。

一般来说，GMAT 数学难度确实没有多大。其知识点也基本上涵盖在市面上出售的教材当中，BLACKHORSE 大哥的讲义里面也总结得比较全面，我就没有必要再狗尾续貂了。想来想去，做数学唯一需要的就是认真再认真。一定要按步骤来。数学绝对不可以"想当然"，看不清题就更要不得了。一定要逐句看。仅在此说说我做题时候一些小手段吧。

GMAT 数学部分分成两种类型的题。其中一种是 PS，给五个选项的。这种题难度一般来说都不是大。毕竟会把答案摆在你眼前，有时候算错了是没有答案的，就知道自己错了可以重新算一次。这种题验算也比较容易。因为题目一般是把条件给出来求结果。既然给出条件你能求出结果，那么算出来以后不妨用上二三十秒的时间把答案代回去重新算一遍，看看能不能给出已知条件来。如果能，说明答案肯定正确；不能，那么可能是答案解错了也可能是你验算的时候出现了一定问题。花点时间想一想，时间是充分的。毕竟还有很多那种超级简单的小题等着你花十秒钟就可以做出来的。但是题简单并不意味着你可以不检查，每个题都要至少算两遍。而相反，难题由于你会下意识的认真做，所以难题马虎的概率反倒小。

解题的时候有几种非常快捷的方法可供使用。我总结了几种，欢迎大家一起来讨论。

第一、挨个试答案，最笨的办法有时候是最快的方法。这种题适用的范围不是很广泛，但是准确率高，只要某个答案符合就肯定可以成立。有时候特别是选项里面有 I only, II III only 之类的题可能效果不错。因为顺着解有时候容易丢解，就算真正算出来了也最好哪个都试试防止不全面。反正一共就 3 个。

例如：

150, 200, 250, n

Which of the following could be the median of the 4 integers listed above?

175

215

235

A. I only

B. II only

C. I and II only

D. II and III only

E. I, II, and III

像这道题用这个方法非常简单

第二、特殊值法。我个人比较喜欢用。这种方法用好了就出奇制胜一击必杀。但用不好就很容易出错。用的时候注意几个问题。

1. 一定要保证你所适用的特殊值是否符合题目中所规定的范围内。比方说，正负数，是否整数，可否为 0，n 个数能否相等之类的等等。还有些隐含的条件一定要注意。比方说 8 月 JJ 里面一个题：

21 个数，第 1 个是后面 20 个平均数的 4 倍，问第 1 个数占 21 个数总和的几分之几。

最简单的方法就是设后面 20 个都是 1，第一个就是 4，4/24=1/6，连 10 秒都用不了就出来了。当然 JJ 做的时候可能会因为作者的原因丢掉一些限制条件，比方说如果说 21 个 different number 就要注意了。

2. 要注意什么样的题可以用特殊值法什么样的不能用。一般来说"could be"的都可以，因为你只要试出一个值可以的，就没问题，但是"must be"往往不行。比方说：

If n is an integer greater than 6, which of the following must be divisible by 3?

A. n (n+1) (n-4)
B. n (n+2) (n-1)
C. n (n+3) (n-5)
D. n (n+4) (n-2)
E. n (n+5) (n-6)

这要是随便试个数，就很容易出现偶然情况，就是你试的那个数正好合适。要试 3，就哪个都合适了。做"must"的题一定要证明。就像做数据充分性的题，一定要确认 must，而不能是 could。

目前就想出来两种。以后要是再碰巧想起来什么我会来加上。总之一定要认真，不管什么方法，不认真都不可能做出来。

ETS 出题虽然简单，简单在他需要的知识并不是很深很多，但并不代表都出那种傻子题。比方说见过有人问个题说，某公司规定，员工的年龄与工龄的和达到 70 年就可以退休。某人刚上班的时候 x 岁，退休时候工龄 y 年。问 x 与 y 的关系。这么看起来挺简单，但用英文表述起来罗罗嗦嗦一大套，个别人粗心，一看这太简单了，都给出来了 x+y=70，选项里面也有这个。这是傻子题。其实 ETS 再弱也会拐个弯的。考试的时候一看有这么简单就能解出来的题，第一个反应就应该是"可能我看错了"，需要更认真地读一遍。然后就会发现 the age of an employee 后面还有两个很短但是非常关键的单词：when hired。然后就会得出结果 x+2y=70。

再说说数据充分性的题。一般难度相对大的题都出在这种类型的题上。因为需要一个逻辑判断的过程。就算会做也很可能被绕进去而选择错误的答案。每个人都知道那种解题流程：先在不看 B 的情况下看 A，然后假装不知道 A 看 B，看完了可以确定 A,B 还是 D。如果都不行，那么就剩下 CE 了。这时候两个条件并作一个条件，充分不充分就决定了 C 还是 E。这也许有人说我是废话但平时看很多在论坛上提问的 XDJM 不按照这个来做。经常是"像"，"感觉"之类的。数学往往最要不得这个。解语法

题，语感有时候很厉害，但数学需要系统的理论的东西。

比如：What is the value of 3^[-(x + y)] / 3^[-(x - y)]?

(1) x = 2

(2) y = 3

猛一看指数都不知道，很可能有人选 E，得俩都知道才行么。但是把指数形式写成乘积形式，就看出来 3^(-x)可以约分掉就剩一个 y 了。选 B。很可能算的时候算错了然后一看答案，突然就明白了哇原来这样。分析的必要几个步骤，绝对一个都不能少。

数据充分性的某些题也可以用特殊值法，但是排除不是确定。因为充分性都是问你能不能 must 的。对于自己感觉不对的答案，不要急于直接排除，想两个不同的值，代进去看看是不是能算出同一个结果来。如果不能，那么肯定不充分了；如果能，可能该选项充分也可能自己举的例子都比较特殊。总之如果举例子判断是否 must 的，举的例子越偏越奇怪往往越能说明问题。

先说这么多吧一时半会也想不起来太多。以后想起什么我会回来补上。反正这东西最根本的东西是你的知识水平，比方说概率，或者解析几何之类某方面的知识不够硬，就有可能碰上知识范围以外的东西，那怎么着也做不出来。其次一定要认真，不认真，就算会做的题也做不对，一点办法都没有。而且这种错误比不会做还窝囊。细致再细致。You can never be too 细致。我说的这都是一些基本 tricks，可以有一定帮助，但不能主宰你的最后分数。GMAT 数学虽然简单，但是都做对了并不容易；虽然都做对了不容易，但是错一两个也能拿到满分吧。我说话的时候用了很多词"一般，大概，往往"之类的。因为数学不会有一个什么定势让你去算的，不同的方法适应不同的题，具体问题要具体分析。所以还需要大家多多练习。努力+细致，51 分，轻松愉快。

有些朋友可能觉得我说的有不少是挺废话的东西，但我觉得都做到了不是很容易。而且有的地方还不是很全面。大家见笑了。我以后还会把这个帖子补全。

祝那孩子，还有广大 CD 友们考试成功。

1.1.1 概率问题

概率问题的难度普遍不算小，而且占的比重比较大，基本上每套题里都得变着花样出几个。公式也较为复杂。

有关于集合类型的公式，AUBUC 等于什么什么之类的，花样又多记忆也繁琐，所以韦氏图是一定要会画的。会了这个什么公式都能自己推出来。比方说 AUBUC 等于什么？画一个图，

AUBUC=三块加起来，但是会发现橙色，绿色和紫色的地方每个加了两遍，再都减去一遍；减完了发现中心黑色的地方多减了一遍，再加回来，就是那个公式了：P（A U B U C）= P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)
所有的那种“多少属于 A 多少属于 B，多少人又有 A 又有 B 多少人什么都没有”这乱七八糟的东西用韦恩图都非常方便。

概率第二个难点是排列组合。

什么时候用排列什么时候用组合，什么时候用指数形式？后一次选择跟前一次选择没有关系的，用指数。比方说一个屋子五个人，问他们各自出生在星期几的事件有几种可能。甲星期几生跟乙丙丁若干人没有任何关系，你生你的我生我的。一星期七天，所以所有的可能性就是 7^5。而排列组合问题，往往是第一次抽的时候拿出来了，第二次就没它了。比方说十二个人里选三个，第一次抽了我，再选第二个人的时候就没我了。指数形式适用于“不放回”，而排列组合用于“放回”

什么时候用排列什么时候用组合？能区分的用排列，不能区分的用组合。比方说从 8 个人里选三个人出国，问有几种可能。选出来就是出国，没有分别，就是 8 个里面选 3 个，C38。从 8 个人里选三个人分别去老挝越南和柬埔寨，有几种可能？老挝，越南，柬埔寨抽象地看就是三个位置的编号，表明三个地方是不同的，抽出来以后要排列。我去老挝你去越南跟我上越南你上柬埔寨是不一样的。所以排列，P38。

排列组合的题还有一个容易混淆的地方，什么时候用减什么时候用除。以前也有朋友问过。

题一：有 1,2,3,4,5 五个数，如果偶数不能够相邻，问能够构成多少个 5 位数？

解：P55-P44 x P22=72

题二：4 个* 号和 2 个？号一共能够组成多少种可能的密码？

解：P66 / P44*P22 =15

像买鱼，咱们掐头去尾说中段，用最精炼的话找出两个题所给信息中最大的不同来，就是上面两个题最大的不同来。题一是“不能要”，题二是“不能区别”。不能区别的，用除法；不能要的，用减法。举个极端的例子，十位数是 1 的两位数，不能是 11，有几种可能性。这个问题比较极端但我就是借此说问题。十位数是 1 的一共有 10---19 共 10 个，不能是 11，怎么办？减掉。还剩下 9 个。具体到第一题：不能偶数相邻怎么办？把偶数相邻的情况，用全部的情况减掉，就行了。

而第二题，能要吗？哪个都能要，只是他们无法区分。先全排列，然后发现，对于某个密码，其中的两个*相互交换位置，所排列出来的密码是一样的；同理 4 个?号也无法区分。用除法把他们各自的排列除掉。不是很好理解。还有个题，我记不清数字了自己编一个。红黄蓝三种车。三个红的，两个黄的两个兰的。如果每个车都不同，有夏利有法拉利有捷达有奔驰什么的，排列怎么排？P88。如果三个红的都是一样的，都是夏利。怎么排？还是 P88，他们仨不能区分，就除以他们仨的全排列 P33，P88/P33 答案。如果黄的也都不能区分，都是奔驰。再除他俩的排列 P22，P88/(P33*P22)。如果兰的也不能区分呢？再除。

先说这么两句。概率题花样多解法多，trick 也多。以后想好了再补上。补丁版本也会更新。感谢大家支持。

Patch 1.2，数列及其相关性质

1.2.1 数列

数列就是一坨数。可以有限个数也可以无限个数，可以有相等的也可以全不相等也可以全都相等。按照数列的表达形式不同，题目中经常出现的数列大概可以分为那么两种：

第一是用通项公式表示的。把 an 用 n 来表示。表明数值与其编号的关系。最常见的是等差数列 an=a1+(n-1)d，和等比数列 an=a1*q^(n-1)。求和问题也是很常见的。两个求和公式。等差数列求和公式=（首项+末项）*项数/2，不难记。等比数列前 n 项和公式 a1*(1-q^n)/(1-q)，也不复杂，念顺了就行了。特别的当无穷等比数列的公比 q 的绝对值小于 1 的时候，就是说-1<q<1 时，因为当 n 趋近于无穷时 q^n--->0，所以该等比数列的所有项的和可以求出来，等于 a1/(1-q)，不难算。这个公式经常被用于近似等比数列中某几项的和，求其范围。因为不管挑出多少项来，其和肯定比全部的和要小，所以 a1/(1-q)就是上限。要具体到题来说。我一时也想不起来合适的题，以后见到再补。

第二就是那种后一项用前一项或者前几项来表示的。比方说给了 a1, a2，然后说对于任何 n>2，an=an-1 – an-2 之类的，然后让你求前 100 项和之类的。这种题肯定有规律。把前面十项八项的都算出来，别怕麻烦，然后加加就发现，从 1 开始，每 4 个数，或者 6 个数，或者每 p 个数的和都是一个数 d，然后用乘法看看前 100 个里面有几个 p 个数就有几个 d，若是不能整除，差几个就单独加上。要细心。

1.2.2 平均数和中位数

这种题很多但感觉都不难。对于中位数的题就把所有的项，不管有多少，从大到小或者从小到大排队，找中间的那一个数，或者中间两个数的平均值。有的题给个复杂的大图表。做 100 个的有 15 个人，90 个的有 20 个，80 个的有 40 个……，作 10 个的有 10 个，求 median。数字是我编的就说个意思。有人问过这种题。一样把他们排队。15 个做 100 的，就写 15 个 100（不用真写自己明白就行了），然后写 20 个 90…………最后写 10 个 10，看最中间那个就是 median，不难。

1.2.3 方差与标准差

方差有点复杂了。关键是不很好理解而且计算太麻烦。首先说方差说明一个什么问题？两个班考试，平均分都是 70 分。看起来都一样。但分析每个人的成绩发现，一班有同学考 100，有 90，有 60 有 30 的。二班呢，每个人成绩都是六七十分，左右差不离。就说明一班比二班成绩波动要大，分布的不够集中。假设第 i 个人的成绩是 Xi，平均成绩是 X，则每个人跟平均成绩的差距就是 Xi-X，把一个班每个人和平均成绩的差距加起来就是：

(X1-X)+(X2-X)+……(Xn-X)=(X1+X2+……Xn)-nX=0。可见平均数不具有衡量分布的集中程度的性质。

因为其中有正有负就抵消了。那么把每项都平方，就都变成正数了，加起来可以说明问题，这就是方差 DX=[(X1-X)^2+(X2-X)^2+……+(Xn-X)^2]/n。

上面方差的定义公式一定要记住，但是还有一个比较重要的公式有时候比较方便分析：[attachimg]40685[/attachimg]

是由定义公式推导而来的，我就不再证明了。简化一下就是 DX=nE(X^2)-(EX^2)。GMAT 里面考方差一般不是考计算而是考你对方差的理解，只要明白方差是跟数据密集程度有关的量就行了。另外要注意是方差还是标准差。

还是那句话，有题再补上。

1.2.4 正态分布

正态分布的题我只见过一个。说一个地区什么什么在 68%的范围之内那个，问过好多遍的，GWD 或者天山里面的我一时也找不到。最后答案是 84%。

感觉很多人对正态分布有极大的误解。经常看到有朋友言必称正态分布。问概率题，方差题，还有抛物线，都有叫“正态分布”的，感觉大家对这个有点怕怕，所以看见不会做得就说是正态分布。正态分布反映的实际上是一个“中庸”思想。就是越中间的越多。在生活中广泛存在。比方说生产一批零件，因为我们的车床都是相同的，生产出来的规格也都是固定的，比方说是 10 厘米。但我们知道由于生产情况不同不可能哪个零件都一模一样，肯定有大点的有小点的，但不会太离谱。所生产出零件的大小肯定都在 10 厘米左右。肯定接近 10 的最多，然后 9.9 或者 10.1 的就稍微少一点但是也不少，如果偏得太离谱，5 厘米或者 15 厘米一个，基本上是不可能出现的。除非机器坏了。9 厘米一个的可能有但是比较少。于是就形成了一个，10 厘米附近概率最大，越往两边概率越小得这么一个图。生活中很多东西都是这样的。比方说成年人的身高，肯定是一米六七八的比较多，一米二三的就少，姚明也少。比方说班里考试的成绩，考 100 分的可能就一两个，考二三十分的也不多。多数应该都是六七八十分。这种中间高两边低成对称状分布的就可以近似认为是正态分布。（数学上的正态分布有公式非常复杂。[attachimg]40687[/attachimg]

形状像一个钟又叫钟形分布。统计上面还有“左偏”，“右偏”，比方说某老师人称 X 校“四大名补”之首，判卷子苛刻无比以挂学生为乐，他判出来的卷子肯定分比别人低。那个钟形分布也就会低分部分人多高分部分人比较少不是标准正态分布。造成右边偏出来一大块空白，就叫“右偏”。这不是 GMAT 讨论的了。帮助大家理解。

总之 GMAT 考正态分布应该不会考太多花样，只要知道 mean 是最中间的那个对称轴所在的地方，

出现频率最高；越往两端越低而且都是对称的就可以了。曲线与 X 轴围成的面积，就是该数值在某一范围内发生的概率。全域上面的整个面积就是事件发生的总概率 1。到时候画个图，用竖线标出值来，在围成的面积上写上所发生的概率，根据意义和所求值加加减减的就可以了。我那时解 84%那个题画了个巨丑的图找了半天没找到。

补充一个关于正态分布的题，今天有朋友问到的。

常规分布的一组数，68%的数落在与一个 standard deviation 区间内，95%落在 2 个 standard deviation， 然后一个研究显示 1000 只猴子的身长也是这么一个常态分布的情况，这组猴子的平均身长是 60 厘米，standard deviation 是 10 厘米，问多少 percent 的猴子身长是在 70 厘米到 80 厘米区间的？

还借那个正态分布的图说明吧。

[attachimg]40701[/attachimg]

50--70 的面积是 68%，40---80 的面积是 95。求 70—80 的面积，理解了就很简单

1.3 关于几何问题

几何问题遇到的也不少。一般可以分为两个方面的东西。第一是立体几何或者平面几何，考察几何基本知识和空间想象能力等；第二类是解析几何，考验对常见图形解析式的理解。

1.3.1 立体几何与平面几何

一直觉得这类题目应该都是白给分的题目，因为图形摆在那里想算错也困难。一些有难度的题要么考察公式公理要么考察想象能力。考察公式的没办法只能去记忆。勾股定理不用说，正弦余弦定理的公式推荐也记住，尽管没见过什么要求用此计算的但有助于分析问题。圆柱圆锥球体等常见旋转体的表面积公式体积公式必须烂熟于心。考验想象能力的题目关键就是连辅助线。记得上初中时候学平

面几何，每天大家都讨论不少难题，有时候老师也挑难题让同学们上去做。基本上每个题都得作辅助线。上去同学一连，老师要看连对了这题就不用讲了。总之平面几何立体几何题看大家问得很少想必没什么困难我也不多废话了。注意要看清题。几何题给出条件的方式多种多样，有时候就在图上标出不很显眼容易被忽略。注意看图和题中的每一句话。

1.3.2 解析几何

我见过的 GMAT 出的解析几何图形只有直线和抛物线。圆都没见过，椭圆更没有了。双曲线似乎也没有。直线要注意斜率问题，注意直线与 y 轴平行的时候直线没有斜率。有题问一个直线斜率的范围，计算出来之后一定注意正负性。抛物线公式 y=ax^2+bx+c，对称轴是 x=-b/2a，与 y 轴交于(0,c)点，顶点（就是最高或者最低点）坐标是(-b/2a, (4ac-b^2)/4a)，这几个公式用于根据给定条件判断参数范围用。顶点问题也用于判断极大值极小值。

因为解析几何参数多，所以经常出数据充分性的题。计算繁琐，常涉及到不等式，出错的概率蛮大的一定要细心。

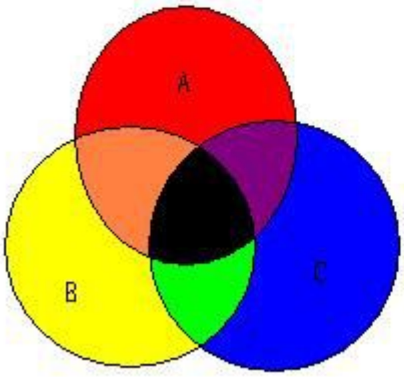
1.4 百分数，比例，倍数等

因为 GMAT 的特殊性质，跟商业活动有关的工资啊，成本，利息，利润等经常用来出题。出的最多的就是哪年是哪年的百分之多少之类的题了，计算比较繁琐，特别是若考充分性的题，极易出错。对于这些问题需要注意几点。

1. 分清分子分母。有几个朋友问过分不清百分数中分子分母怎么办。有个窍门就是，翻译成汉语，“比”字，“是”字后面的是 1 倍量，“的”字前面的是 1 倍量。比如说 1998 年比 1997 年多 10%，1997 年是 1 倍量，98 年是 110%；97 年比 98 年少 10%，98 年是 1 倍量，97 年是 98 年的 90%，如果还设 97 年是 1，那么 98 年是 111.1%。

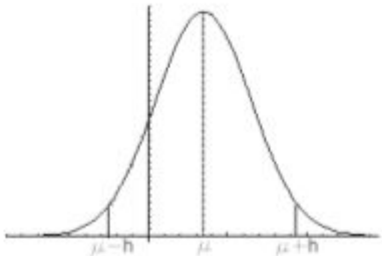
2. 倍数问题注意：是哪年的几倍和比哪年多几倍。英语汉语都是一样的。翻译过来就能通。

3. 对于给字母的题，千万要注意是 P percent 还是 P，比上一年增长了 P 和增长了 P%是不一样的。假设增长了百分之五十。如果说增长了 P，那么 P 就是 0.5；增长了 P%，就是 P/100，那么 P 就等于 50。很多题在这上面玩文字游戏绕人进去。小心。

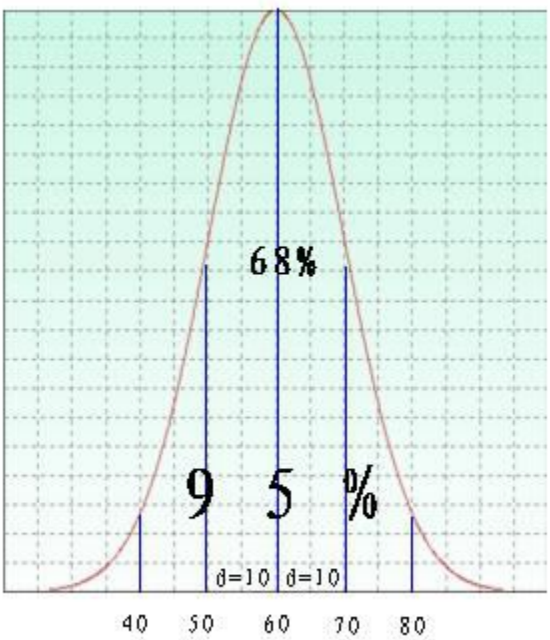


4.

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - n\bar{x}^2].$$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



余数题

余数题，顾名思义，就是 j 除以 k 的余数。在 GMAT 中，余数题的考法以j^n除以 k 的余数为多少,其中 n 很大，居多。好多 TX 都苦于寻求这类题的一类解法。下面请允许我给大家介绍一下我的通解：

理论上我的通解基于一个定理——高中的二项式定理：

$$(p+q)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}, 其中 C_n^i=\frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

根据此定理，我们可以把j^n拆成$(p+q)^n$的形式，其中 p 为 k 的倍数（设 p=mk），q 为小于等于 k 的非负整数（拆成）；如果 j 小于 k，则拆成$(p+q)^{\frac{n}{2}}$的形式；有人会想到 n 为奇数，没关系，提出一个 j 后就是偶数次幂，拆成$j(p+q)^{\frac{n-1}{2}}$就行了；还有人有疑问，j^2也小于 k 该怎么办呢？没关系，继续上面的方法拆啊。为简化讨论，以下以 n 为偶数，j>k 的情况为例。然后由此定理的，该展开式的前（n-1）项的形式为：$\sum_{i=0}^{n} C_n^i (mk)^i q^{n-i}$。含有 k 必能被 k 整除。于是乎，问题就转化为q^n除以 k 的问题了，这个问题和j^n除以 k 的余数问题等价。如果运气好，q=1,直接可以得到余数为 1（GMAT）.

如果运气不好，继续用上述方法拆，最后一定会得到结果的。以下举例题演示：

1、7^{50}除以 15 的余数：

7^{50}=49^{25}=$(45+4)^{25}$

=>问题转化为4^{25}能否被 15 整除

4^{25}=4×4^{24}=4×16^{12}=$4\times(15+1)^{12}$=>问题转化为4×1^{12}能否被 15 整除——显然，余 4

2、3^{50}除以 8 的余数：

$3^{50}=9^{25}=(8+1)^{25}$=>问题转化为1^{25}除 8 的余数——显然，余 1

3、13^{50} 除以 8 的余数：

$13^{50}=169^{25}=(168+1)^{25}$=>问题转化为$1^{25}$除 8 的余数——显然，余 1

很多同学对余数题都不知如何下手，其实前辈们已经为我们总结了很多方法，为方便大家，我在这里给大家汇总 2 种最常用，同时也比较便捷的解题思路，希望能帮大家顺利通过考试。注：版权归原作者所有，俺只是负责宣传，：）

如果看不懂推理过程，也不必计较，直接记住方法就可以了。同时希望大家顺手 up 下，以便帮助后面的同学。
第一种、设通项式求解。

通项 S，形式设为 S=Am+B，一个乘法因式加一个常量

系数 A 必为两小通项因式系数的最小公倍数

常量 B 应该是两个小通项相等时的最小数，也就是最小值的 S

例题：4－JJ78(三月 84).ds 某数除 7 余 3，除 4 余 2，求值。

解：设通项 S=Am+B。由题目可知，必同时满足 S=7a+3=4b+2

A 同时可被 7 和 4 整除，为 28（若是 S＝6a+3=4b+2，则 A＝12）

B 为 7a+3=4b+2 的最小值，为 10（a=1.b=2 时，S 有最小值 10）

所以 S＝28m＋10

满足这两个条件得出的通项公式，必定同时满足两个小通项。如果不能理解的话，就记住这个方法吧，此类的求通项的问题就能全部，一招搞定啦

扫除 GMAT 数学死角之余数方法集合(来自美国论坛）

Introduction　(赶时间的童鞋可以略过。。。只是一些概念帮助童鞋们回忆余数~~~)
Definition
If x and y are positive integers, there exist unique integers q and r, called the quotient and remainder, respectively, such that y= divisor * quotient + remainder = xq + r; and 0<=r < x.
For example, when 15 is divided by 6, the quotient is 2 and the remainder is 3 since 15 = 6*2+3.

Notice that 0<= r < x means that remainder is a non-negative integer and always less than divisor.
This formula can also be written as y/x = q + r/x.

Properties

When y is divided by x the remainder is0 if y is a multiple of x.

For example, 12 divided by 3 yields the remainder of 0 since 12 is a multiple of 3 and 12 = 3*4+0.

When a smaller integer is divided by a larger integer, the quotient is 0 and the remainder is the smaller integer.

For example, 7 divided by 11 has the quotient 0 and the remainder 7 since 7=11*0+7

The possible remainders when positive integer y is divided by positive integer x can range from 0 to x-1.

For example, possible remainders when positive integer y is divided by 5 can range from 0 (when y is a multiple of 5) to 4 (when y is one less than a multiple of 5).

If a number is divided by 10, its remainder is the last digit of that number. If it is divided by 100 then the remainder is the last two digits and so on.

For example, 123 divided by 10 has the remainder 3 and 123 divided by 100 has the remainder of 23.

1. Collection of Methods

Method 1：小数法

A way that the GMAT will test remainders is what you would typically just divide back into the problem to determine the decimals:

25/4 = 6 remainder 1

Divide that 1 back by 4 to get 0.25, so the answer is 6.25.

Any number with a remainder could be expressed as a decimal.

The remainder provides the data after the decimal point, and the quotient gives you the number to the left of the decimal point.

Consider this problem (which appears courtesy of GMAC):

Example： When positive integer x is divided by positive integer y, the remainder is 9. If x/y = 96.12,what is the value of y?

(A) 96 (B) 75 (C) 48 (D) 25 (E) 12

Sol：

Going back to the concept of the remainder, the remainder of 9 is what will give us that 0.12 after the decimal place. The answer to the division problem x/y is either:

96 remainder 9

Or

96.12

Therefore, when the remainder of 9 is divided back over y, we get 0.12. Mathematically, this means that:

9/y = 0.12

0.12y = 9

12y = 900

y = 900/12

y = 300/4

y = 75

The correct answer is B.

方法二：重建法

Given that an integer "n" when divided by an integer "a" gives "r" as reminder then the integer"n" can be written as

$n = ak + r$

where k is a constant integer.

Example 1： What is the remainder when B is divided by 6 if B is a positive integer?

(1) When B is divided by 18, the remainder is 3

(2) When B is divided by 12, the remainder is 9

Sol：

STAT1 : When B is divided by 18, the remainder is 3

So, we can write B as

$B = 18k + 3$

Now, to check the reminder when B is divided by 6, we essentially need to check the reminder when $18k + 3$ is divided by 6

18k goes with 6 so the reminder will 3

So, it is sufficient

STAT2 : When B is divided by 12, the remainder is 9

So, we can write B as

$B = 12k + 9$

Now, to check the reminder when B is divided by 6, we essentially need to check the reminder when $12k + 9$ is divided by 6

12k goes with 6 so the remainder will be the same as the reminder for 9 divided by 6 which is 3

So, reminder is 3

So, it is sufficient.

Answer will be D

Practice:

What is the remainder when positive integer t is divided by 5?

(1) When t is divided by 4, the remainder is 1

(2) When t is divided by 3, the remainder is 1

这题请大家自己试一试哦。毕竟嘛。。。看的效果还是不如自己做一题的效果好哇~~~下面大片的黄色区域都是讲解哦。。。所以大家不用担心~~~试着做一做吧~~~加油↖(^ω^)↗

Sol：

STAT1: When t is divided by 4, the remainder is 1

$t = 4k +1$

possible values of t are 1,5,9,13

Clearly we cannot find a unique reminder when t isdivided by 5 as in some cases(t=1) we are getting the reminder as 1 and insome(t=5) we are getting the reminder as 0.

So, INSUFFICIENT
STAT2: When t is divided by 3, the remainder is 1
$t = 3s + 1$
possible values of t are 1,4,7,10,13,16,19
Clearly we cannot find a unique reminder when t is divided by 5 as in some cases(t=1) we are getting the reminder as 1 and in some(t=10) we are getting the reminder as 0.
So, INSUFFICIENT
STAT1+STAT2： there are two approaches
1. Write the values of t from stat1 and then from stat2 and then take the common values
From STAT1 t = 1,5,9,13,17,21,25,29,33
From STAT2 t = 1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34
Common values are t = 1,13,25,
2. Equate $t = 4k+1$ to $t=3s+1$
We have $4k + 1 = 3s+1$
$k = 3s/4$
since, k is an integer so only those values of s which are multiple of 4 will satisfy both STAT1 and STAT2
so, common values are given by $t = 3s + 1$ where s is multiple of 4
so t = 1,13,25 (for s=0,4,8 respectively)
Clearly we cannot find a unique reminder when t is divided by 5 as in some cases (t=1) we are getting the reminder as 1 and in some(t=10) we are getting the reminder as 0.
So, INSUFFICIENT
So, answer will be E

Example 2：If p and n are positive integers and p > n, what is the remainder when p^2 - n^2 is divided by 15 ?
(1) The remainder when p + n is divided by 5 is 1.
(2) The remainder when p - n is divided by 3 is 1

Sol:
STAT1 : The remainder when p + n is divided by 5 is 1.
$p+n = 5k + 1$
but we cannot say anything about p^2 - n^2 just from this information.
So, INSUFFICIENT
STAT2 : The remainder when p - n is divided by 3 is 1
$p-n = 3s + 1$
but we cannot say anything about p^2 - n^2 just from this information.
So, INSUFFICIENT
STAT1+STAT2：
p^2 - n^2 = (p+n) * (p-n) = (5k + 1) * (3s + 1)= 15ks + 5k + 3s + 1
The reminder of the above expression by 15 is same as the reminder of 5k + 3s + 1 with 15 as 15ks will go with 15.
But we cannot say anything about the reminder as its value will change with the values of k and s.

So INSUFFICIENT
Hence answer will be E

Example 3：If n is a positive integer and r is the remainder when 4 +7n is divided by 3, what is the value of r?
(1) n+1 is divisible by 3
(2) n>20.

Sol:
r is the remainder when 4 + 7n is divided by 3
7n + 4 can we written as 6n + n + 3+ 1 = 3(2n+1) + n +1
reminder of 7n+4 by 3 will be same as reminder of 3(2n+1) +n +1 by 3
3*(2n+1) will go by 3 so the reminder will be the same as the reminder of (n+1) by 3.
STAT1: n+1 is divisible by 3
n+1 = 3k (where k is an integer)
n+1 will give 0 as the reminder when divided by 3
so, 7n+4 will also give 0 as the reminder when its divided by 3 (as its reminder is same as the reminder for (n+1) when divided by 3 => r =0
So, SUFFICIENT
STAT2: n>20.
we cannot do anything by this information as there are many values of n
so, INSUFFICIENT.
Hence, answer will be A

Practice: If x is an integer, is x between 27 and 54?
(1) The remainder when x is divided by 7 is 2.
(2) The remainder when x is divided by 3 is 2.

Sol:
STAT1: The remainder when x is divided by 7 is 2.
x = 7k + 2
Possible values of x are 2,9,16,...,51,...
we cannot say anything about the values of x
so, INSUFFICIENT
STAT2: The remainder when x is divided by 3 is 2.
x = 3s + 2
Possible values of x are 2,5,8,11,...,53,...
we cannot say anything about the values of x
so, INSUFFICIENT
STAT1+STAT2：now there are two approaches
1. write the values of t from stat1 and then from stat2 and then take the common values
from STAT1 x = 2,9,16,23,30,37,44,51,58,...,65,...
from STAT2 x = 2,5,8,...,23,...,44,...,59,65,...

common values are x = 2,23,44,65,...
2. equate x = 7k+2 to x=3s+2
we have 7k + 2 = 3s+2
k = 3s/7
since, k is an integer so only those values of s which are multiple of 7 will satisfy both STAT1 and STAT2
so, common values are given by x = 3s + 2 where s is multiple of 7
so x = 2,23,44,65 (for s=0,7,14,21 respectively)
Clearly there are values of x which are between 27 and 54 (i.e. 44) and those which are not (2,23,65)
So, both together also INSUFFICIENT
So, answer will be E

方法三：MOD 法
请大家参见知之为之之大侠的帖子！！！地址：<http://forum.chasedream.com/GMAT_Math/thread-437516-1-1.html>

2. Remainder QuestionPatterns
Background
- Most GMAT remainder problems are encountered in data sufficiency section.
- All GMAT remainder questions are limited to positive integers only.
- Both number plugging method and algebra are suitable tosolve remainder questions.
- Some remainder questions can be disguised as word problems. See below.
- Usually you get 1, maximum 2 questions on remainders on thetest (based on GMAT Prep CATs)

以下 Pattern 并不是按照重要性顺序来排的哟~~~Pattern 6 is the most common pattern! 妹纸觉得大家都可以看一看。。。当做练习吧~~~

Pattern#1: The ratio of two integers is given and we are asked to find possible value of the remainder when one integer is divided by another.

Q1： OG13 diagnostic test, question 13
If s and t are positive integers such that s/t = 64.12, which of the following could be the remainder when s is divided by t ?
(A) 2
(B) 4
(C) 8
(D) 20
(E) 45

Sol：
S divided by t yields the remainder of r can always be expressed as: s/t = q + r/t (which is the same as s= qt+r), where q is the quotient and r is the remainder.
Given that s/t = 64.12 = 64(12/100) = 64(3/25) = 64 +3/25,so according to the above r/t=3/25, which means that r must be a multiple of 3. Only option E offers answer which is a multiple of 3

Answer. E.

Q2： OG13 Practice Questions, question 95

When positive integer x is divided by positive integer y,the remainder is 9. If x/y = 96.12, what is the value of y?

(A) 96

(B) 75

(C) 48

(D) 25

(E) 12

Sol：

When positive integer x is divided by positive integer y,the remainder is 9 --> x=qy+9;

x/y=96.12 --> x=96y+0.12y (so q above equals to 96);

0.12y=9 --> y=75.

Answer: B

finding the remainder when an expression with variable is divided by some integer.

OG13 Practice Questions, question 26

If n is a prime number greater than 3, what is the remainder when n^2 is divided by 12 ?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 5

Sol：

There are several algebraic ways to solve this question, but the easiest way is as follows: since we cannot have two correct answers just pick a prime greater than 3, square it and see what would be the remainder upon division of it by 12.

n=5 --> n^2=25 --> remainder upon division 25 by 12 is 1.

Answer: B.

Pattern#3: min/max question involving remainders

When positive integer n is divided by 5, the remainder is 1. When n is divided by 7, the remainder is 3. What is the smallest positive integer k such that k + n is a multiple of 35.

A. 3

B. 4

C. 12

D. 32

E. 35

Sol：

Positive integer n is divided by 5, the remainder is 1--> n = 5q+1, where q is the quotient --> 1, 6, 11, 16,21, 26,31, ...
Positive integer n is divided by 7, the remainder is 3--> n=7p+3, where p is the quotient --> 3, 10, 17, 24, 31,....
You cannot use the same variable for quotients in both formulas, because quotient may not be the same upon division n by two different numbers.
For example 31/5, quotient q=6 but 31/7, quotient p=4.
There is a way to derive general formula for n (of a type n= mx+r, where x is divisor and r is a remainder)based on above two statements:
Divisor x would be the least common multiple of above two divisors 5 and 7, hence x=35.
Remainder r would be the first common integer in above two patterns, hence r=31.
Therefore general formula based on both statements is n=35m+31.Thus the smallest positive integer k such that k+n is a multiple of 35 is 4--> n+4 = 35k+31+4 = 35(k+1).
Answer: B

Pattern#4: disguised PS remainder problem.

There are between 100 and 110 cards in a collection of cards. If they are counted out 3 at a time, there are 2 left over, but if they are counted out 4 at a time, there is 1 left over. How many cards are in the collection?
(A) 101
(B) 103
(C) 106
(D) 107
(E) 109

Sol：
If the cards are counted out 3 at a time, there are 2 leftover: x=3q+2. From the numbers from 100 to 110 following three give the remainder of 2 upon division by 3: 101, 104 and 107;
If the cards are counted out 4 at a time, there are 1 leftover: x=4p+1. From the numbers from 100 to 110 following three give the remainder of 1 upon division by 4: 101, 105 and 109.
Since x, the number of cards, should satisfy both conditions then it equals to 101.
Answer:A

Pattern#5: we need to answer some question about an integer, when the statements give info involving remainders.

Q1：OG13 Practice Questions, question 58
What is the tens digit of positive integer x ?
(1) x divided by 100 has a remainder of 30.
(2) x divided by 110 has a remainder of 30.

Sol：
(1) x divided by 100 has a remainder of 30 --> x =100q+30, so x can be: 30, 130, 230, ... Each has the

tens digit of 3. Sufficient.
(2) x divided by 110 has a remainder of 30 --> x =110p+30, so x can be: 30, 250, ... We already have two values for the tens digit. Not sufficient.
Answer:A.

Q2：OG13 Practice Questions, question 83
If k is an integer such that 56 < k < 66, what is the value of k ?
(1) If k were divided by 2, the remainder would be 1.
(2) If k + 1 were divided by 3, the remainder would be 0.

Sol：
(1) If k were divided by 2, the remainder would be 1 -->k is an odd number, thus it could be 57, 59, 61, 63, or 65. Not sufficient.
(2) If k + 1 were divided by 3, the remainder would be 0--> k is 1 less than a multiple of 3, thus it could be 59, 62, or 65. Not sufficient.
(1)+(2) k could still take more than one value: 59 or 65. Not sufficient.
Answer: E.

Pattern#6: we need to find the remainder when some variable or an expression with variable(s) is divided by some integer. Usually the statements give divisibility/remainder info. Most common patter.

Q1：What is the remainder when the positive integer n is divided by 6?
(1) n is multiple of 5
(2) n is a multiple of 12

Sol：
(1) n is multiple of 5. If n=5, then n yields the remainder of 5 when divided by 6 but if n=10, then n yields the remainder of 4 when divided by 6. We already have two different answers, which means that this statement is not sufficient.
(2) n is a multiple of 12. Every multiple of 12 is also a multiple of 6, thus n divided by 6 yields the remainder of 0. Sufficient.
Answer: B.

Q2：If x and y are integer, what is the remainder when x^2 + y^2 is divided by 5?
(1) When x-y is divided by 5, the remainder is 1
(2) When x+y is divided by 5, the remainder is 2

Sol：
(1) When x-y is divided by 5, the remainder is 1--> x-y = 5q+1, so x-y can be 1, 6, 11, ... Now, x=2 and y=1 (x-y=1) then x^2+y^2= 5 and thus the remainder is 0, but if x=3 and y=2 (x-y=1)then x^2+y^2= 13 and thus the remainder is 3. Not sufficient.
(2) When x+y is divided by 5, the remainder is 2--> x+y=5p+2, so x+y can be 2, 7, 12, ... Now, x=1 and y=1 (x+y=2) then x^2+y^2= 2 and thus the remainder is 2, but if x=5 and y=2 (x+y=7) then x^2+y^2= 29 and thus the remainder is 4. Not sufficient.

(1)+(2) Square both expressions: $x^2 -2xy +y^2= 25q^2 + 10q+ 1$ and $x^2 +2xy +y^2= 25p^2 + 20p + 4$ --> add them up: $2(x^2+y^2)= 5(5q^2+2q+5p^2+4p+1)$--> so $2(x^2+y^2)$ is divisible by 5 (remainder 0), which means that so is x^2+y^2. Sufficient.
Answer: C.

Q3：If t is a positive integer and r is the remainder when t^2+5t+6 is divided by 7, what is the value of r?
(1) When t is divided by 7, the remainder is 6.
(2) When t^2 is divided by 7, the remainder is 1.

Sol：
First of all factor t^2+5t+6 --> $t^2+5t+6=(t+2)(t+3)$
(1) When t is divided by 7, the remainder is 6 -->$t=7q+6$ --> $(t+2)(t+3)=(7q+8)(7q+9)$. Now, no need to expand and multiply all the terms, just notice that when we expand all terms but the last one, which will be $8*9=72$, will have 7 as a factor and 72 yields the remainder of 2 upon division by 7. Sufficient.
(2) When t^2 is divided by 7, the remainder is 1 -->different values of t possible: for example t=1 or t=6, which when substituted in $(t+2)(t+3)$ will yield different remainder upon division by 7. Not sufficient.
Answer: A.

Q4：If p is a positive odd integer, what is the remainder when p is divided by 4 ?:
(1) When p is divided by 8, the remainder is 5.
(2) p is the sum of the squares of two positive integers.

Sol：
(1) When p is divided by 8, the remainder is 5 --> $p= 8q+5 = (8q+4) + 1 = 4(2q+1) + 1$--> so the remainder upon division of p by 4 is 1 (since first term is divisible by 4 and second term yields remainder of 1 upon division by 4). Sufficient.
(2) p is the sum of the squares of two positive integers -->since p is an odd integer then one of the integers must be even and another odd: $p=(2n)^2 + (2m+1)^2 = 4n^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 4(n^2+m^2+m) + 1$-->the same way as above: the remainder upon division of p by 4 is 1 (since first term is divisible by 4 and second term yields remainder of 1 upon division by 4). Sufficient.
Answer: D.

Q5：If n is a positive integer and r is the remainder when $(n-1)(n+1)$ is divided by 24, what is the value of r?
(1) n is not divisible by 2
(2) n is not divisible by 3

Sol：
Plug-in method:
$(n-1)(n+1) = n^2-1$

(1) n is not divisible by 2 --> pick two odd numbers:let's say 1 and 3 --> if n=1, then $n^2-1=0$ and as

zero is divisible by 24 (zero is divisible by any integer except zero itself) so remainder is 0 but if n=3, then n^2-1=8 and 8 divided by 24 yields remainder of 8. Two different answers, hence not sufficient.
(2) n is not divisible by 3 --> pick two numbers which are not divisible by 3: let's say 1 and 2 --> if n=1, then n^2-1=0,so remainder is 0 but if n=2, then n^2-1=3 and 3 divided by 24 yields remainder of 3. Two different answers, hence not sufficient.
(1)+(2) Let's check for several numbers which are not divisible by 2 or 3:
n=1 --> n^2-1=0 --> remainder 0;
n=5 --> n^2-1=24 --> remainder 0;
n=7 --> n^2-1=48 --> remainder 0;

n=11 --> n^2-1=120 --> remainder 0.
Well it seems that all appropriate numbers will give remainder of 0. Sufficient.

Algebraic approach:
(1) n is not divisible by 2. Insufficient on its own, but this statement says that n=odd --> n-1 and n+1 are consecutive even integers --> (n-1)(n+1) must be divisible by 8(as both multiples are even and one of them will be divisible by 4. From consecutive even integers one is divisible by 4: (2, 4); (4, 6); (6, 8); (8,10); (10, 12), ...).
(2) n is not divisible by 3. Insufficient on its own, but form this statement either n-1 or n+1 must be divisible by 3 (as n-1, n, and n+1 are consecutive integers, so one of them must be divisible by 3, we are told that it's not n, hence either n-1 or n+1).
(1)+(2) From (1) (n-1)(n+1) is divisible by 8,from (2) it's also divisible by 3, therefore it must be divisible by 8*3=24,which means that remainder upon division (n-1)(n+1) by 24 will be 0. Sufficient.
Answer: C.

Pattern#7: disguised DS remainder problem.

A person inherited few gold coins from his father. If he put 9 coins in each bag then 7 coins are left over. However if he puts 7 coins in each bag then 3 coins are left over. What is the number of coins he inherited from his father?
(1) The number of coins lies between 50 to 120.
(2) If he put 13 coins in one bag then no coin is left over and number of coins being lesser than 200.

Sol：
If he puts 9 coins in each bag then 7 coins are left over--> c=9q+7, so # of coins can be: 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, ...
If he puts 7 coins in each bag then 3 coins are left over--> c=7p+3, so # of coins can be: 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45,52, 59, ...
General formula for c based on above two statements will be: c=63k+52 (the divisor should be the least common multiple of above two divisors 9 and 7, so 63 and the remainder should be the first common integer in above two patterns, hence 52).
C=63k+52 means that # of coins can be: 52, 115, 178,241, ...
(1) The number of coins lies between 50 to 120 --> # of coins can be 52 or 115. Not sufficient.
(2) If he put 13 coins in one bag then no coin is left over and number of coins being lesser than 200 -->

# of coins is a multiple of 13 and less than 200: only 52 satisfies this condition. Sufficient.
Answer: B.

Pattern#8: C-Trap remainder problem. "C trap" is a problem which is VERY OBVIOUSLY sufficient if both statements are taken together. When you see such question you should be extremely cautious when choosing C for an answer.
If a and b are positive integers, what is the remainder when 4^(2a+1+b) is divided by 10?
(1) a = 1
(2) b = 2

Sol：
4 in positive integer power can have only 2 last digits: 4,when the power is odd or 6 when the power is even. Hence, to get the remainder of 4^x/10 we should know whether the power is odd or even: if it's odd the remainder will be 4 and if it's even the remainder will be 6.
(1) a = 1 --> 4^(2a+1+b) = 4^(3+b) depending on b the power can be even or odd. Not sufficient.
(2) b = 2 --> 4^(2a+1+b) = 4^(2a+3) = 4^(even+odd)= 4^odd--> the remainder upon division of 4^odd by 10 is 4. Sufficient.
Answer: B.

3. Collection of GMATRemainder Problems

1.If r is the remainder when the positive integer n is divided by 7, what is the value of r
(1) When n is divided by 21, the remainder is an odd number
(2) When n is divided by 28, the remainder is 3

Sol：
The possible reminders can be 1,2,3,4,5 and 6. We have the pinpoint the exact remainder from this 6 numbers.
St 1: when n is divided by 21 (7 and 3) the remainder is an odd number.
But it cannot be 7, 3 or 9 . Hence the possibilities are: 1 and 5.
Hence there can be two remainders ,1 and 5, when divided by 7.
NOT SUFFICIENT
St 2: when n is divided by 28 the remainder is 3.
As 7 is a factor of 28, the remainder when divided by 7 will be 3
SUFFICIENT
Answer: B

2. If n and m are positive integers, what is the remainder when 3^(4n + 2 + m) is divided by 10 ?
(1) n = 2
(2) m = 1

Sol：
The Concept tested here is cycles of powers of 3.
The cycles of powers of 3 are : 3,9,7,1

St I) n = 2. This makes 3^(4*2 +2 + m) = 3^(10+m). we do not know m and hence cannot figure out the unit digit.
St II) m=1 . This makes 3^(4*n +2 + 1).
4n can be 4,8,12,16...
3^(4*n +2 + 1) will be 3^7,3^11, 3^15,3^19 ..... in each case the unit digit will be 7. SUFF
Hence B

3.If p is a positive odd integer, what is the remainder when p is divided by 4 ?
(1) When p is divided by 8, the remainder is 5.
(2) p is the sum of the squares of two positive integers.

Sol：
st1. take multiples of 8....divide them by 4...remainder=1 in each case...
st2. p is odd, since p is square of 2 integers...one will be even and other odd....now when we divide any even square by 4 vll gt 0 remainder..and when divide odd square vll get 1 as remainder......so in total remainder=1
Ans : D

4.If p and n are positive integers and p > n, what is the remainder when p^2 - n^2 is divided by 15 ?
(1) The remainder when p + n is divided by 5 is 1.
(2) The remainder when p - n is divided by 3 is 1.

Sol：
st1) p+n=6,11,16....insuff.
st2) p-n=4,7,10....insuff...
multiply these two to get p^2-n^2.....multiplying any two values from the above results in different remainder......
also can be done thru equation....p+n=5a+1..and so on
Ans: E

5.What is the remainder when the positive integer x is divided by 3 ?
(1) When x is divided by 6, the remainder is 2.
(2) When x is divided by 15, the remainder is 2.

Sol：
st 1：multiple of 6 will also be multiple of 3 so remainder will be same as 2.
st 2：multiple of 15 will also be multiple of 3....so the no.that gives remainder 2 when divided by 15 also gives 2 as the remainder when divided by 3...
Answer D

6.What is the remainder when the positive integer n is divided by 6 ?
(1) n is a multiple of 5.
(2) n is a multiple of 12.

Sol：
st 1) multiples of 5=5,10,15....all gives differnt remainders with 6
st 2) n is divided by 12...so it will be divided by 6...remainder=0
Answer B

7. If x, y, and z are positive integers, what is the remainder when 100x + 10y + z is divided by 7?
(1) y = 6
(2) z = 3

Sol：
We need to know all the variables. We cannot get that from both the statements. Hence the answer is E.

8. If n is a positive integer and r is the remainder when 4 +7n is divided by 3, what is the value of r ?
(1) n + 1 is divisible by 3.
(2) n > 20

Sol：
st1) n+1 divisible by 3..so n=2,5,8,11......
this gives 4+7n=18,39,60....remainder 0 in each case......
st2) insufficient ....n can have any value
Answer A

9. If n is a positive integer and r is the remainder when (n- 1)(n + 1) is divided by 24, what is the value of r ?
(1) n is not divisible by 2.
(2) n is not divisible by 3.

Sol：
ST 1- if n is not divisible by 2, then n is odd, so both(n - 1) and (n + 1) are even. Moreover, since every other even number is a multiple of 4, one of those two factors is a multiple of 4. So the product (n -1)(n + 1) contains one multiple of 2 and one multiple of 4, so it contains at least 2 x 2 x 2 = three 2's in its prime factorization.
But this is not sufficient, because it can be (n-1)*(n+1)can be 2*4 where remainder is 8. it can be 4*6 where the remainder is 0.
ST 2- if n is not divisible by 3, then exactly one of (n- 1) and (n + 1) is divisible by 3, because every third integer is divisible by 3. Therefore, the product (n - 1)(n + 1) contains a 3 in its prime factorization.
Just like st 1 this is not sufficient
ST1+ST2 - the overall prime factorization of (n - 1)(n +1) contains three 2's and a 3.
Therefore, it is a multiple of 24.
Sufficient
Answer C

高考数学轻松搞定排列组合难题二十一种方法

排列组合问题联系实际生动有趣，但题型多样，思路灵活，因此解决排列组合问题，首先要认真审题，弄清楚是排列问题、组合问题还是排列与组合综合问题；其次要抓住问题的本质特征，采用合理恰当的方法来处理。

教学目标

1. 进一步理解和应用分步计数原理和分类计数原理。
2. 掌握解决排列组合问题的常用策略;能运用解题策略解决简单的综合应用题。提高学生解决问题分析问题的能力
3. 学会应用数学思想和方法解决排列组合问题.

复习巩固

1. 分类计数原理(加法原理)

完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：

$$\boxed{N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

种不同的方法.

2. 分步计数原理（乘法原理）

完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有：

$$\boxed{N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n}$$

种不同的方法.

3. 分类计数原理分步计数原理区别

分类计数原理方法相互独立，任何一种方法都可以独立地完成这件事。

分步计数原理各步相互依存，每步中的方法完成事件的一个阶段，不能完成整个事件.

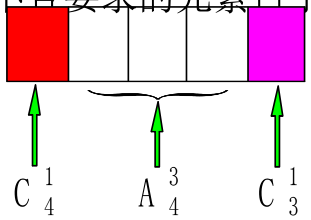
解决排列组合综合性问题的一般过程如下:

1. 认真审题弄清要做什么事
2. 怎样做才能完成所要做的事,即采取分步还是分类,或是分步与分类同时进行,确定分多少步及多少类。
3. 确定每一步或每一类是排列问题(有序)还是组合(无序)问题,元素总数是多少及取出多少个元素.
4. 解决排列组合综合性问题，往往类与步交叉，因此必须掌握一些常用的解题策略

一. 特殊元素和特殊位置优先策略

例 1. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字五位奇数.

解:由于末位和首位有特殊要求,应该优先安排,以免不合要求的元素占了这两个位置.



先排末位共有 C_3^1

然后排首位共有 C_4^1

最后排其它位置共有 A_4^3

由分步计数原理得 $C_4^1C_3^1A_4^3=288$

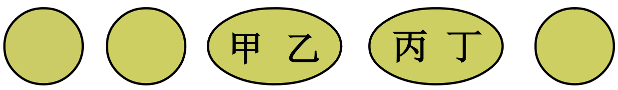
位置分析法和元素分析法是解决排列组合问题最常用也是最基本的方法,若以元素分析为主,需先安排特殊元素,再处理其它元素.若以位置分析为主,需先满足特殊位置的要求,再处理其它位置。若有多个约束条件，往往是考虑一个约束条件的同时还要兼顾其它条件

练习题:7 种不同的花种在排成一列的花盆里,若两种葵花不种在中间，也不种在两端的花盆里，问有多少不同的种法？

二. 相邻元素捆绑策略

例 2. 7 人站成一排 ,其中甲乙相邻且丙丁相邻, 共有多少种不同的排法.

解：可先将甲乙两元素捆绑成整体并看成一个复合元素，同时丙丁也看成一个复合元素，再与其它元素进行排列，同时对相邻元素内部进行自排。由分步计数原理可得共有 $A_5^5A_2^2A_2^2=480$ 种不同的排法



要求某几个元素必须排在一起的问题,可以用捆绑法来解决问题.即将需要相邻的元素合并为一个元素,再与其它元素一起作排列,同时要注意合并元素内部也必须排列.

练习题:某人射击 8 枪，命中 4 枪，4 枪命中恰好有 3 枪连在一起的情形的不同种数为__20__

P52, 4 枪不中则就有 5 个空格可以插入，把 3 枪当做一枪，另一中枪当另一枪，5 中选 2 个。

三. 不相邻问题插空策略

例 3. 一个晚会的节目有 4 个舞蹈, 2 个相声, 3 个独唱, 舞蹈节目不能连续出场, 则节目的出场顺序有多少种？

解:分两步进行第一步排 2 个相声和 3 个独唱共有 A_5^5 种，第二步将 4 舞蹈插入第一步排好的 6 个元素中间包含首尾两个空位共有种 A_6^4 不同的方法, 由分步计数原理, 节目的不同顺序共有 $A_5^5A_6^4$______种

元素相离问题可先把没有位置要求的元素进行排队再把不相邻元素插入中间和两

练习题：某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单，开演前又增加了两个新节目.如果将这两个新节目插入原节目单中，且两个新节目不相邻，那么不同插法的种数为__30（6p2）__

四.定序问题倍缩空位插入策略

例 4.7 人排队,其中甲乙丙 3 人顺序一定共有多少不同的排法

解:(倍缩法)对于某几个元素顺序一定的排列问题,可先把这几个元素与其他元素一起进行排列,然后用总排列数除以这几个元素之间的全排列数,则共有不同排法种数是：A_7^7/A_3^3

(空位法)设想有 7 把椅子让除甲乙丙以外的四人就坐共有$\underline{A_7^4}$种方法，其余的三个位置甲乙丙共有__1__种坐法，则共有$\underline{A_7^4}$种方法。

思考:可以先让甲乙丙就坐吗?

我猜不行，因为甲乙丙的位置只要顺序不变可以随意变，他们的就坐就有许多方式，不好针对。而让 4 个路人先坐，可以固定位置，坐完之后的甲乙丙必须做相对的位置。

(插入法)先排甲乙丙三个人,共有 1 种排法,再把其余 4 四人依次插入共有__________方法

定序问题可以用倍缩法，还可转化为占位插

练习题:10 人身高各不相等,排成前后排，每排 5 人,要求从左至右身高逐渐增加，共有多少排法?

C_{10}^5**（10 个任选 5 个人，放到第一排，因为只有 1 种排法所以乘以 1，而剩下的人也只有一种排法乘以 1）**

五.重排问题求幂策略

例 5.把 6 名实习生分配到 7 个车间实习,共有多少种不同的分法

解:完成此事共分六步:把第一名实习生分配到车间有__7__种分法.把第二名实习生分配到车间也有 7 种分依此类推,由分步计数原理共有 7^6 种不同的排法

允许重复的排列问题的特点是以元素为研究对象，元素不受位置的约束，可以逐一安排各个元素的位置，一般地 n 不同的元素没有限制地安排在 m 个位置上的排列数为 m^n 种

练习题：

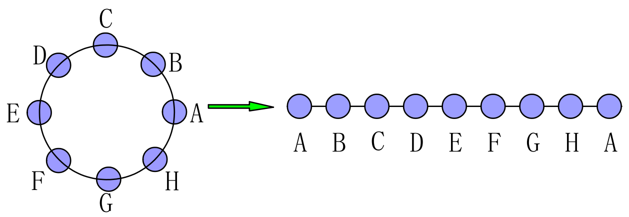
1. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单，开演前又增加了两个新节目.如果将这两个节目插入原节目单中，那么不同插法的种数为__42__（第一个节目有 6 个位置选择，选好以后第二个节目有 7 个位置可以选择）

2. 某 8 层大楼一楼电梯上来 8 名乘客人,他们到各自的一层下电梯,下电梯的方法 $\underline{7^8}$

六. 环排问题线排策略

例 6. 8 人围桌而坐,共有多少种坐法?

解:围桌而坐与坐成一排的不同点在于,坐成圆形没有首尾之分,所以固定一人 A_4^4 并从此位置把圆形展成直线其余 7 人共有(8-1)!种排法即 7!



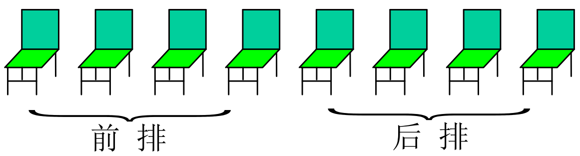
一般地,n 个不同元素作圆形排列,共有(n-1)!种排法.如果从 n 个不同元素中取出 m 个元素作圆形排列共有 $\frac{1}{n}A_n^m$

练习题:6 颗颜色不同的钻石,可穿成几种钻石圈 120(P55)

七. 多排问题直排策略

例 7. 8 人排成前后两排,每排 4 人,其中甲乙在前排,丙在后排,共有多少排法

解:8 人排前后两排,相当于 8 人坐 8 把椅子,可以把椅子排成一排. 个特殊元素有 $\underline{A_4^2}$ 种,再排后 4 个位置上的特殊元素丙有 $\underline{A_4^1}$ 种,其余的 5 人在 5 个位置上任意排列有 $\underline{A_5^5}$ 种,则共有 $\underline{A_4^2A_4^1A_5^5}$ 种



一般地,元素分成多排的排列问题,可归结为一排考虑,再分段研

练习题:有两排座位,前排 11 个座位,后排 12 个座位,现安排 2 人就座规定前排中间的 3 个座位不能坐,并且这 2 人不左右相邻,那么不同排法的种数是 <u>346</u>

<u>20*17+4+2</u>

八. 排列组合混合问题先选后排策略

例 8. 有 5 个不同的小球,装入 4 个不同的盒内,每盒至少装一个球,共有多少不同的装法.

解:第一步从 5 个球中选出 2 个组成复合元共有 $\underline{C_5^2}$ 种方法. 再把 4 个元素

(包含一个复合元素)装入 4 个不同的盒内有$\underline{A_4^4}$种方法，根据分步计数原理装球的方法共有$\underline{C_5^2A_4^4}$

解决排列组合混合问题,先选后排是最基本的指导思想.此法与相邻元素捆绑策略相似吗?

练习题：一个班有 6 名战士,其中正副班长各 1 人现从中选 4 人完成四种不同的任务,每人完成一种任务,且正副班长有且只有 1 人参加,则不同的选法有_192_种

九. 小集团问题先整体后局部策略

例 9. 用 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数其中恰有两个偶数夹 1，5 在两个奇数之间,这样的五位数有多少个？

解：把 1，5，2，4 当作一个小集团与 3 排队共有$\underline{A_2^2}$种排法，再排小集团内部共有$\underline{A_2^2A_2^2}$种排法，由分步计数原理共有$\underline{A_2^2A_2^2A_2^2}$种排法.

1524　3

小集团排列问题中，先整体后局部，再结合其它策略进行处理。

练习题：

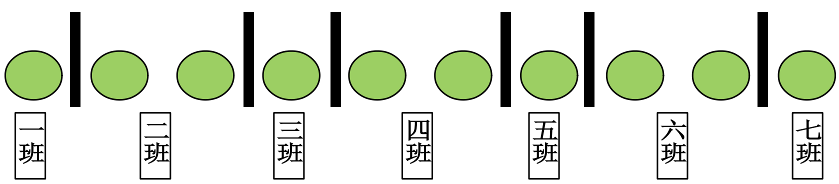
1．计划展出 10 幅不同的画,其中 1 幅水彩画，4 幅油画，5 幅国画， 排成一行陈列,要求同一品种的必须连在一起，并且水彩画不在两端，那么共有陈列方式的种数为$\underline{A_2^2A_5^5A_4^4}$

2.　5 男生和 5 女生站成一排照像,男生相邻,女生也相邻的排法有$\underline{A_2^2A_5^5A_5^5}$种

十. 元素相同问题隔板策略

例 10. 有 10 个运动员名额,分给 7 个班,每班至少一个,有多少种分配方案?

解：因为 10 个名额没有差别，把它们排成一排。相邻名额之间形成 9 个空隙。在 9 个空档中选 6 个位置插个隔板，可把名额分成 7 份，对应地分给 7 个班级，每一种插板方法对应一种分法共有$\underline{C_9^6}$种分法。



将 n 个相同的元素分成 m 份（n，m 为正整数）,每份至少一个元素,可以用 m-1 块隔板，插入 n 个元素排成一排的 n-1 个空隙中，所有分法数为C_{n-1}^{m-1}

练习题：

1.　10 个相同的球装 5 个盒中,每盒至少一有多少装法？　C_9^4

2 . $x+y+z+w=100$求这个方程组的自然数解的组数　　C_{103}^{3}

十一. 正难则反总体淘汰策略

例 11. 从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个数字中取出三个数，使其和为不小于 10 的偶数,不同的取法有多少种？

解：这问题中如果直接求不小于 10 的偶数很困难,可用总体淘汰法。这十个数字中有5个偶数5个奇数,所取的三个数含有3个偶数的取法有C_5^3,只含有 1 个偶数的取法有$C_5^1C_5^2$,和为偶数的取法共有$C_5^1C_5^2+C_5^3$。再淘汰和小于 10 的偶数共 9 种，符合条件的取法共有$C_5^1C_5^2+C_5^3-9$

有些排列组合问题,正面直接考虑比较复杂,而它的反面往往比较简捷,可以先求出它的反面,再从整体中淘汰.

练习题：我们班里有 43 位同学,从中任抽 5 人,正、副班长、团支部书记至少有一人在内的

抽法有多少种?（C435　－C405）

十二. 平均分组问题除法策略

例 12.　6 本不同的书平均分成 3 堆,每堆 2 本共有多少分法?

解: 分三步取书得$C_6^2C_4^2C_2^2$种方法,但这里出现重复计数的现象,不妨记 6 本书为 ABCDEF，若第一步取 AB,第二步取 CD,第三步取 EF 该分法记为　(AB,CD,EF),　则　$C_6^2C_4^2C_2^2$　中　还　有 (AB,EF,CD),(CD,AB,EF),(CD,EF,AB)(EF,CD,AB),(EF,AB,CD) 共 有 A_3^3种取法 ,而这些分法仅是(AB,CD,EF)一种分法,故共有$C_6^2C_4^2C_2^2/A_3^3$种分法。

平均分成的组,不管它们的顺序如何,都是一种情况,所以分组后要一定要除以 A_n^n(n 为均分的组数)避免重复计数。

练习题：

1　将 13 个球队分成 3 组,一组 5 个队,其它两组 4 个队, 有多少分法?（$C_{13}^5C_8^4C_4^4/A_2^2$）

2.10 名学生分成 3 组,其中一组 4 人, 另两组 3 人但正副班长不能分在同一组,有多少种不同的

分组方法 （1540）

3.某校高二年级共有六个班级，现从外地转　入 4 名学生，要安排到该年级的两个班级且每班安

排 2 名，则不同的安排方案种数为______（$C_4^2C_2^2A_6^2/A_2^2=90$）

十三. 合理分类与分步策略

例 13. 在一次演唱会上共 10 名演员, 其中 8 人能能唱歌, 5 人会跳舞, 现要演出一个 2 人唱歌 2 人伴舞的节目, 有多少选派方法

解：10 演员中有 5 人只会唱歌，2 人只会跳舞 3 人为全能演员。选上唱歌人员为标准进行研究

只会唱的 5 人中没有人选上唱歌人员共有 $\underline{C_3^2C_3^2}$ 种, 只会唱的 5 人中只有 1 人选上唱歌人员 $\underline{C_5^1C_3^1C_4^2}$ 种, 只会唱的 5 人中只有 2 人选上唱歌人员有 $\underline{C_5^2C_5^2}$ 种，由分类计数原理共有

$\underline{C_3^2C_3^2+C_5^1C_3^1C_4^2+C_5^2C_5^2}$ 种。

> 解含有约束条件的排列组合问题，可按元素的性质进行分类，按事件发生的连续过程分步，做到标准明确。分步层次清楚，不重不漏，分类标准一旦确定要贯穿于解题过程的始终。

练习题：

1. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座　　谈会，若这 4 人中必须既有男生又有女生，则不同的选法共有 34
2. 3 成人 2 小孩乘船游玩, 1 号船最多乘 3 人， 2 号船最多乘 2 人, 3 号船只能乘 1 人, 他们任选 2 只船或 3 只船, 但小孩不能单独乘一只船， 这 3 人共有多少乘船方法. （27）

本题还有如下分类标准：

*以 3 个全能演员是否选上唱歌人员为标准

*以 3 个全能演员是否选上跳舞人员为标准

*以只会跳舞的 2 人是否选上跳舞人员为标准

都可经得到正确结果

十四. 构造模型策略

例 14. 马路上有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九只路灯, 现要关掉其中的 3 盏, 但不能关掉相邻的 2 盏或 3 盏, 也不能关掉两端的 2 盏, 求满足条件的关灯方法有多少种？

解: 把此问题当作一个排队模型在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 个不亮的灯有 $\underline{C_5^3}$ 种

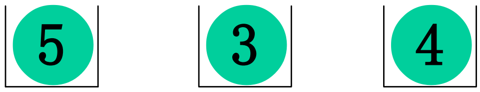
> 一些不易理解的排列组合题如果能转化为非常熟悉的模型，如占位填空模型，排队模型，装盒模型等，可使问题直观解决

练习题：某排共有 10 个座位，若 4 人就坐，每人左右两边都有空位，那么不同的坐法有多少种？（120）

十五. 实际操作穷举策略

例 15. 设有编号 1,2,3,4,5 的五个球和编号 1,2,3,4,5 的五个盒子,现将 5 个球投入这五个盒子内,要求每个盒子放一个球，并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同,有多少投法

解：从 5 个球中取出 2 个与盒子对号有 $\underline{C_5^2}$ 种还剩下 3 球 3 盒序号不能对应，利用实际操作法，如果剩下 3,4,5 号球， 3,4,5 号盒 3 号球装 4 号盒时，则 4,5 号球有只有 1 种装法，同理 3 号球装 5 号盒时,4,5 号球有也只有 1 种装法,由分步计数原理有 $2C_5^2$ 种

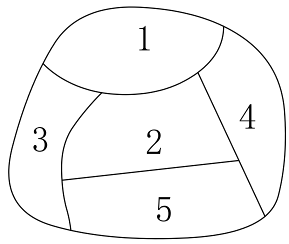


3 号盒　　4 号盒　　5 号盒

对于条件比较复杂的排列组合问题，不易用公式进行运算，往往利用穷举法或画出树状图会收到意想不到的结果

练习题：

1. 同一寝室 4 人,每人写一张贺年卡集中起来,然后每人各拿一张别人的贺年卡，则四张贺年卡不同的分配方式有多少种？　(9)
2. 给图中区域涂色,要求相邻区 域不同色,现有 4 种可选颜色,则不同的着色方法有 72 种



十六. 分解与合成策略

例 16. 30030 能被多少个不同的偶数整除

分析:先把 30030 分解成质因数的乘积形式 30030=2×3×5 × 7 ×11×13

依题意可知偶因数必先取 2,再从其余 5 个因数中任取若干个组成乘积，

所有的偶因数为：$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$

练习:正方体的 8 个顶点可连成多少对异面直线

解：我们先从 8 个顶点中任取 4 个顶点构成四体共有体共 $\underline{C_8^4-12=58}$，每个四面体有

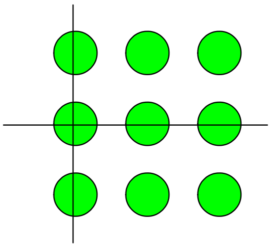
3 对异面直线, 正方体中的 8 个顶点可连成 $3\times58=174$ 对异面直线

分解与合成策略是排列组合问题的一种最基本的解题策略,把一个复杂问题分解成几个小问题逐一解决,然后依据问题分解后的结构,用分类计数原理和分步计数原理将问题合成,从而得到问题的答案 ,每个比较复杂的问题都要用到这种解题策略

十七. 化归策略

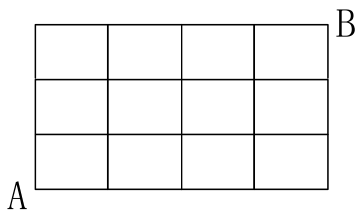
例 17. 25 人排成 5×5 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 不同的选法有多少种?

解：将这个问题退化成 9 人排成 3×3 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 有多少选法. 这样每行必有 1 人从其中的一行中选取 1 人后, 把这人所在的行列都划掉，如此继续下去. 从 3×3 方队中选 3 人的方法有 $\underline{C_3^1C_2^1C_1^1}$ 种。再从 5×5 方阵选出 3×3 方阵便可解决问题. 从 5×5 方队中选取 3 行 3 列有 $\underline{C_5^3C_5^3}$ 选法所以从 5×5 方阵选不在同一行也不在同一列的 3 人有 $\underline{C_5^3C_5^3C_3^1C_2^1C_1^1}$ 选法。



处理复杂的排列组合问题时可以把一个问题退化成一个简要的问题，通过解决这个简要的问题的解决找到解题方法，从而进下一步解决原来的问题

练习题: 某城市的街区由 12 个全等的矩形区组成其中实线表示马路，从 A 走到 B 的最短路径有多少种？（$C_7^3=35$）



十八. 数字排序问题查字典策略

例 18. 由 0，1，2，3，4，5 六个数字可以组成多少个没有重复的比 324105 大的数?

解: $N=2A_5^5+2A_4^4+A_3^3+A_2^2+A_1^1=297$

数字排序问题可用查字典法, 查字典的法应从高位向低位查, 依次求出其符合要求的个数, 根据分类计数原理求出其总数。

练习:用 0,1,2,3,4,5 这六个数字组成没有重复的四位偶数,将这些数字从小到大排列起来,第 71 个数是 3140

十九. 树图策略

例 19. 3人相互传球,由甲开始发球,并作为第一次传球,经过5次传求后,球仍回到甲的手中,则不同的传球方式有______ $N = 10$

对于条件比较复杂的排列组合问题，不易用公式进行运算，树图会收到意想不到的结果

练习: 分别编有 1,2,3,4,5 号码的人与椅,其中i号人不坐i号椅($i = 1,2,3,4,5$)的不同坐法有多少种? $N = 44$

二十. 复杂分类问题表格策略

例 20. 有红、黄、兰色的球各 5 只,分别标有 A、B、C、D、E 五个字母,现从中取 5 只,要求各字母均有且三色齐备,则共有多少种不同的取法

解:

红	1	1	1	2	2	3
黄	1	2	3	1	2	1
兰	3	2	1	2	1	1
取法	$C_5^1C_4^1$	$C_5^1C_4^2$	$C_5^1C_4^3$	$C_5^2C_3^1$	$C_5^2C_3^2$	$C_5^3C_2^1$

一些复杂的分类选取题,要满足的条件比较多, 无从入手,经常出现重复遗漏的情况,用表格法,则分类明确,能保证题中须满足的条件,能达到好的效

二十一：住店法策略

解决“允许重复排列问题”要注意区分两类元素：一类元素可以重复，另一类不能重复，把不能重复的元素看作“客”，能重复的元素看作“店”，再利用乘法原理直接求解.

例 21. 七名学生争夺五项冠军，每项冠军只能由一人获得，获得冠军的可能的种数有__________.

分析：因同一学生可以同时夺得 n 项冠军，故学生可重复排列，将七名学生看作 7 家“店”，五项冠军看作 5 名“客”，每个“客”有 7 种住宿法，由乘法原理得 7^5种.

小结

本节课，我们对有关排列组合的几种常见的解题策略加以复习巩固。排列组合历来是学习中的难点，通过我们平时做的练习题，不难发现排列组合题的特点是条件隐晦，不易挖掘，题目多变，解法独特，数字庞大，难以验证。同学们只有对基本的解题策略熟练掌握。根据它们的条件,我们就可以选取不同的技巧来解决问题.对于一些比较复杂的问题,我们可以将几种策略结合起来应用把复杂的问题简单化，举一反三，触类旁通，进而为后续学习打下坚实的基础。

【扫除 GMAT 数学死角】排列组合超详细分析

妹纸发这个帖子主要是为了帮助像妹纸一样数学不好的孩纸。。。大神请绕路…求不要被喷╮(╯▽╰)╭吼吼~~~~~

妹纸的数学就像是冬天里的一把火…熊熊把妹纸烧死了。。。

如果打算看下去的童鞋不要嫌弃妹纸的碎碎念。。。我很唠叨我知道╮(╯_╰)╭

赶时间的童鞋请回复以后拖到绿色 highlight 的地方。。。

PS！！为了不让帖子沉了（妹纸挺的很用力 T T）。。。妹纸下狠心设置隐藏了。。。请不要怪我。。。

继续看的童鞋就让妹纸再骚扰一下吧。。。虽然妹纸大学是在米国读的而且一度成为了班里数学的第一名。。。但寺!!!!高考数学 150 分我华丽丽的只有 53 分(～ o ～)Y

这也是后来促成妹纸远走他乡的原因!!!!这么烂的数学考不上国内的好大学有木有!!!!

然后考 T 和 S 终于飘走不用受数学的折磨了…G 的到来又让妹纸掉进了深渊!!!!我就是传说中拖祖国后腿的人!!!!

反正离开俺们伟大滴祖国以后我已经退化到加减都用计算器了…米国人的恶习啊!!!!它不仅偷了我的钱还偷了我的智商!!!!

不过请不要因为妹纸数学差而质疑这个帖子的正确性！！！！因为俺后面说了俺是总结别的大神的！！！！妹纸只是加入了自己理解的部分！！！！而且妹纸只把求证过的理解放在里面！！！！

妹纸看到有童鞋表示看不懂或者哪里有疑问。请大家不要犹豫在帖子下面留言哇！我会定期上线回复的！如果不方面可以直接站内信给妹纸噢！！大家考试加油！！O(∩_∩)O~~

背景完毕。。。开始做 G 以后我发现它灰常喜欢问以前学的排列组合的东西…不知道你们还记不记得排列组合…反正我是不记得了….然后以碰到类似的啊我就被绕进去了…到底是肿木做啊!!!!!!
请看 jj 有关题目:
40. 【确定】9 个 members 和一个 director，选出四个人组成 committee，问 director 在其中的概率？
2/5 拉黑看答案
好吧这道题很直接…我知道它想要干嘛…

请再看:
43. 【确定】将 140 个东西均分给 N 个人，N≧2，且每个人至少得到两个，问 N 有多少种可能？
10 请再拉黑（2、4、5、7、10、14、20、28、25、70）
看到这题的时候我就喷血了…这是要闹哪样!!!!!!如果我不看答案我都不知道怎么做啊!!!!!!(请勿鄙视)

然后:
59. 100 到 500 之间，三位数中有两位不一样的（非两个数相同的数有）多少？
288 请看
这是要干神马干神马干神马!!!!!!! og 上有相似的但人家问的是两位相同的有几个啊！！！你问我两个不相同的要我怎么算啊！！！！！！！

妹纸很久木有上了刚刚上线才发现很多童鞋对这题有疑问.上次也有童鞋特意站内信我问这题的解释…妹纸去翻了一下机经的解释,请看 jj 整理者的解释:百位为 1：9×8=72 种
百位为 2：9×8=72 种
百位为 3：9×8=72 种
百位为 4：9×8=72 种

总共=72×4=288 种。
妹纸给的解释：感觉这是狗主的表达不对。因为按照 jj 整理者的思路这里的意思是三位数里面任意两位数都不相同。。暂且将这题当做求三位数里面任意两位数都不相同的情况吧。。
那么 100~500 之间。。。三位数有两位不一样就满足条件
所以 1xx，2xx,3xx，4xx　我们只要确定后面两位就行了。那么就是问 xx 的排列。。
1xx 的十位可以选 9 个数字{0，2，3，4，5，6，7，8，9}，个位能选 9-1=8 个数字，就是 9*8
2xx，　3xx，4xx，　同理。。所以就是 9*8*4 = 288
这里妹纸也同意 furseal 的观点：如果不是狗主表达问题或者 jj 答案出错，按照三位数中有俩位不一样的思路那么应该是 10*9*4 = 360.因为可以包括 112 这种情况
所以 1xx 的十位可以选 10 个数字{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9}，个位能选 10-1=9 个数字，就是 10*9
2xx，　3xx，4xx，　同理。。所以就是 10*9*4 = 360
求童鞋们补充~~~

再然后:
73.　【确定】一个集合是{2,3,5,7,11}，问任意三个不相同的数的乘积有几种可能？
10　嘿嘿
这题我不会做各种苦思冥想啊。。。最后终于忍不住看答案了。。。然后发现我真的是 too young too simple 了。。。答案用了 C 公式就解决了！！!!为什么我不知道用！！！！我还是知道公式怎么用的好不好！！！！

然后我反思来反思去觉得我对排列和组合这两个概念太木有概念了！！！！所以我就去搜了搜。。。下面是结果。。。妹纸盗取别人的总结里面比较有用的部分自己总结为【排列与组合的区别】、【两个基本计数原理及应用】和【排列与组合中比较难讲清楚的题型】。其中还包括了一些和 JJ 相似的题目与 JJ 的比较。。。

大家有兴趣可以看看自己琢磨琢磨。。如果大家看不清楚答案的话请放大屏幕比例再拉黑！！！妹纸很懒。。。写帖子不容易。。。就不重新放答案了~~~

进入正题前容妹纸再插一句：为了帮助大家愉快的阅读我用花花绿绿的颜色

标记了不同的妹纸觉得重要的东西~~~~~绿色表示三个大类、黄色关键词、例题和拉黑答案、蓝色是妹纸的碎碎念大家可以选择性的用评判的眼光看。。。妹纸把长长的学术性语言自己巴拉了一遍。。。对于妹纸本人还是很通俗易懂的。。。如果大家发现不对的地方欢迎讨论！！！

OK, 1、2、3…GO!

本帖隐藏的内容

【排列与组合的区别】

(一)两个基本原理是排列和组合的基础

(1)加法原理：做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m1 种不同的方法，在第二类办法中有 m2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 mn 种不同的方法，那么完成这件事共有 N＝m1＋m2＋m3＋…＋mn 种不同方法.

(2)乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m1 种不同的方法，做第二步有 m2 种不同的方法，……，做第 n 步有 mn 种不同的方法，那么完成这件事共有 N＝m1×m2×m3×…×mn 种不同的方法.

这里要注意区分两个原理，要做一件事，完成它若是有 n 类办法，是分类问题，第一类中的方法都是独立的，因此用加法原理；做一件事，需要分 n 个步骤，步与步之间是连续的，只有将分成的若干个互相联系的步骤，依次相继完成，这件事才算完成，因此用乘法原理。

这样完成一件事的分“类”和“步”是有本质区别的，因此也将两个原理区分开来。

(二)排列和排列数

(1)排列：从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。
从排列的意义可知，如果两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序必须完全相同，这就告诉了我们如何判断两个排列是否相同的方法。

(2)排列数公式：从 n 个不同元素中取出 m(m≤n)个元素的所有排列
当 m＝n 时，为全排列 Pnn=n(n－1)(n－1)…3•2•1＝n!

(三)组合和组合数

(1)组合：从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。
从组合的定义知，如果两个组合中的元素完全相同，不管元素的顺序如何，都是相同的组合；只有当两个组合中的元素不完全相同时，才是不同的组合。

(2)组合数：从 n 个不同元素中取出 m(m≤n)个元素的所有组合的个数
这里要注意排列和组合的区别和联系，从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素，“按照一定的顺序排成一列”与“不管怎样的顺序并成一组”这是有本质区别的。

[反思] 排列与组合的共同点是从 n 个不同的元素中，任取 m（m≤n）个元素，而不同点是排列是按照一定的顺序排成一列，组合是无论怎样的顺序并成一组，因此“有序”与“无序”是区别排列与组合的重要标志。

简单举例：1、2、3 挑两个组成一个数字和 1、2、3 挑两个数字是完全不一样的！1、2、3 挑两个组成一个数字那是排列；1、2、3 挑两个数字那是组合。例如我选 1 和 2，排列里面 12 和 21 是两个数字！但是组合的话挑 1 和 2 就和挑 2 和 1 没有分别！！！

【两个基本计数原理及应用】

(1)加法原理和分类计数法
1．加法原理
2．加法原理的集合形式
3．分类的要求
每一类中的每一种方法都可以独立地完成此任务；两类不同办法中的具体方法，互不相同(即分类不重)；完成此任务的任何一种方法，都属于某一类(即分类不漏)。

(2)乘法原理和分步计数法
1．乘法原理

2. 合理分步的要求

任何一步的一种方法都不能完成此任务，必须且只须连续完成这 n 步才能完成此任务；各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此事的方法也不同。

1. 首先明确任务的意义

例 1.　从 1、2、3、……、20 这二十个数中任取三个不同的数组成等差数列，这样的不同等差数列有________个。

妹纸批注：这个例子妹纸觉得还是很有用的！！大家可以先做做再看后面的解答！！！

分析：首先要把复杂的生活背景或其它数学背景转化为一个明确的排列组合问题。

设 a,b,c 成等差，∴　2b=a+c,　可知 b 由 a,c 决定，

又∵　2b 是偶数，∴　a,c 同奇或同偶，即：从 1，3，5，……，19 或 2，4，6，8，……，20 这十个数中选出两个数进行排列，由此就可确定等差数列，因而本题为 180。童鞋们要注意啊。。。为什么答案不是直接等于 C(10,2)*2 = 90 呢？？？请回想我刚才的例子“1、2、3 挑两个组成一个数字和 1、2、3 挑两个数字是完全不一样的！例如我选 1 和 2，排列里面 12 和 21 是两个数字！但是组合的话挑 1 和 2 就和挑 2 和 1 没有分别！！！”然后题目这里要求的是能组成多少个等差数列。。如果我从奇数组里面选出 1 和 3 然后确定一个等差数列例如{1,2,3}，那么呢{3,2,1}其实是不同的等差数列吧？？所以我们要再在 90 的基础上乘以 2，因为第一个数能和第三个数对调变变成两个不同的等差数列！！！！

例 2.　某城市有 4 条东西街道和 6 条南北的街道互相垂直且街道之间的间距相同。M 在城市最南街道与最西街道的交点；N 在城市最北街道与最东街道的交点。若规定只能向东或向北两个方向沿街道前进，则从 M 到 N 有多少种不同的走法?

分析：对实际背景的分析可以逐层深入

（一）从 M 到 N 必须向上走三步，向右走五步，共走八步。

（二）每一步是向上还是向右，决定了不同的走法。

（三）事实上，当把向上的步骤决定后，剩下的步骤只能向右。

从而，任务可叙述为：从八个步骤中选出哪三步是向上走，就可以确定走法数，

∴ 本题答案为：56 tip：为何这里不是 P 而是 C 组合？因为选出 8 个步骤中向上走的那三步是不能进行排列的

先后顺序是没办法颠倒的，因为必须经过了下面的才能到上面的，所以整个过程是不可排列的，只有一种情况就是从下至上！，从左至右！

264. 【确定】八条街道互相垂直，四条南北街道四条东西街道， A 在最南和最西的交点，B 在最北和最东的交点。从 A 到 B，只向上或者向右行走，也就是只向被或者向东走，有几种走法？（图片妹纸弄不来所以偷懒改成文字啦，原题可以去找 JJ 里面的哦！！！）

20 看这里

2. 注意加法原理与乘法原理的特点，分析是分类还是分步，是排列还是组合

例 3. 在一块并排的 10 垄田地中，选择二垄分别种植 A，B 两种作物，每种种植一垄，为有利于作物生长，要求 A，B 两种作物的间隔不少于 6 垄，不同的选法共有______种。

分析：条件中“要求 A、B 两种作物的间隔不少于 6 垄”这个条件不容易用一个包含排列数，组合数的式子表示，因而采取分类的方法。

第一类：A 在第一垄，B 有 3 种选择；

第二类：A 在第二垄，B 有 2 种选择；

第三类：A 在第三垄，B 有 1 种选择，

同理 A、B 位置互换 ，共 12 种。

有疑问！！！

例 4. 从 6 双不同颜色的手套中任取 4 只，其中恰好有一双同色的取法有________。

(A)240 (B)180 (C)120 (D)60

分析：显然本题应分步解决。

（一）从 6 双中选出一双同色的手套，有 6 种方法；

（二）从剩下的十只手套中任选一只，有 10 种方法。

（三）从除前所涉及的两双手套之外的八只手套中任选一只，有 8 种方法；

（四）由于选取与顺序无关，因而（二）（三）中的选法重复一次，因而共 240 种。

*由于是在选了 10 个中的一个的基础上排除 1 个再从 8 个中选，所以这就有了顺序了

或分步（如果按照 A 的做法，那么就先取了 10 个手套再取了 8 个手套，其

实已经有顺序了，但是按照 B 的方法，即 C 来，就是一直没有顺序的）
（一）从 6 双中选出一双同色的手套，有 C（6,1）=6 种方法
（二）从剩下的 5 双手套中任选两双，有 C（5,2）=10 种方法
（三）从两双中手套中分别拿两只手套，有 C（2,1）×C（2,1）=4 种方法。
同样得出共⑴×⑵×⑶=240 种。

妹纸说：个人觉得第一种更好理解！让我深深体会到“顺序”是神马！以前觉得没有顺序的话岂不是数字应该更多更大？然后现在仔细想想真是 too young too simple 啊！！就比如我前面举的例子：1、2、3 挑两个组成一个数字和 1、2、3 挑两个数字是完全不一样的！1、2、3 挑两个组成一个数字那是排列；1、2、3 挑两个数字那是组合。例如我选 1 和 2，排列里面 12 和 21 是两个数字！但是组合的话挑 1 和 2 就和挑 2 和 1 没有分别！！！

例 5.　身高互不相同的 6 个人排成 2 横行 3 纵列，在第一行的每一个人都比他同列的身后的人个子矮，则所有不同的排法种数为_______。
永远用排列组合的思维来解题，而不是用凑数的思维！
分析：每一纵列中的两人只要选定，则他们只有一种站位方法，因而每一纵列的排队方法只与人的选法有关系，共有三纵列，从而有 C（6,2）×C（4,2）×C（2,2）=90 种。童鞋补充解释（Thanks to　伤心的小鹅肝）~~~~两行三纵列，然后因为只要第一行的人比第二行的人矮，那么每一列，如果第一行的人选定，那么第二行的人也一定选定，所以第一列是 C(6,2)，　第二列是 C（4，2），第三列是 C（2，2）。欢迎更多童鞋补充完善 O(∩_∩)O~~

例 6．在 11 名工人中，有 5 人只能当钳工，4 人只能当车工，另外 2 人能当钳工也能当车工。现从 11 人中选出 4 人当钳工，4 人当车工，问共有多少种不同的选法?

妹纸说：看到这题以后妹纸就明白 Gmac 为神马那么喜欢出排列组合的题了。。。思维逻辑啊思维逻辑。。。

分析：采用加法原理首先要做到分类不重不漏，如何做到这一点？分类的标准必须前后统一。
以两个全能的工人为分类的对象，考虑以他们当中有几个去当钳工为分类标准。
第一类：这两个人都去当钳工，有 C（2,2）×C（5,2）×C（4,4）=10 种；
第二类：这两人人都去当车工，有 C（5,4）×C（2,2）×C（4,2）=30 种；
第三类：这两人什么工都不去，有 C（5,4）×C（4,4）=5 种；

第四类：这两个人一个去当钳工、一个去当车工，C（2,1）×C（5,3）×C（4,3）=80 种；
第五类：这两个人一个去当钳工、另一个不去当车工，C（2,1）×C（5,3）×C（4,4）=20 种；
第六类：这两个人一个去当车工、另一个不去当钳工，C（5,4）×C（2,1）×C（4,3）=40 种；
因而共有 185 种。

例 7．强烈推荐看现有印着 0，1，3，5，7，9 的六张卡片，如果允许 9 可以作 6 用，那么从中任意抽出三张可以组成多少个不同的三位数?

（无 9 无 6 的情况下，有 9 的情况下，有 6 的情况下。每种情况下有 0 和无 0 的情况）
妹纸说：这题花了妹纸巨多心思！！！这题原本的分析有点残缺。而且好难啊！！！！经过妹纸的搜索和上下求证。把脑子都想烂了终于通了！！！！妹纸把分析仔细的重新梳理了一遍。如果有童鞋发现问题欢迎指出讨论！！！

分析：有同学认为只要把 0，1，3，5，7，9 的排法数乘以 2 即为所求，但实际上抽出的三个数中有 9 的话才可能用 6 替换，因而必须分类。
(蓝条里面都是妹纸自己的补充，希望各位自己求证)首先，两个重要的因素是“三位数的千位数不能是 0”和“抽到 9 可以用 6 替换”。
所以：
抽出的三数含 0，含 9 的情况： 0 不能为千位数，所以 X09，X90，9X0，90X。剩下一位数有四种情况 1，3，5，7。即 4*4。9 能够由 6 替代，所以 4*4*2=32，有 32 种方法；
抽出的三数含 0 不含 9 的情况：0 不能为千位数，所以必须是 XX0，X0X。又因为不含 9.所以剩下两位数有四种情况 1，3，5，7。即 4*3（一个位数用掉一个数字以后，下一个位数就只有 3 个数可以用啦）。所以一起有 4*3*2=24，有 24 种方法；
抽出的三数含 9 不含 0 的情况：木有 0 所以不用担心千位数是啥。但是必须抽中 9 哦，所以 9XX，X9X，XX9。剩下两位数有四种情况 1，3，5，7。即 4*3。所以含 9 的一起有 4*3*3=36 种。然而！！！大家不要忘记了！！！6 他能替代 9 啊！！！所以还要乘以 2，一起 36*2=72，有 72 种方法；
抽出的三数不含 9 也不含 0 的情况：题目做到这里难的部分已经结束了。。。木有 0 也木有 9 嘛那就很容易啦。1，3，5，7 这四个数字随便组成个 3 位数就行了。所以 4*3*2=24，有 24 种方法。
因此共有 32+24+72+24=152 种方法。

另外一种方法：9 可以做 6 用，相当于有 7 张牌，所以算得为 6*6*5=180。（注意：这里一开始就去掉了 0 在千位数的情况哦，所以后面就不用 worry 啦）但是实际只有 6 张牌。所以要除去同一次中抽出 9 和 6 的，包含 9 和 6 的三位数中有 6 种排列，96X，69X，9X6，6X9，X69，X96。其中包括开头不是 0 的四种排列和开头或许是 0 的两种排列。开头不是 0 的四种排列中，剩下的一位有 5 种情况，0、1、3、5、7。即 5*4。开头可能为 0 的两种数列中，因为开始我们已经排除了 0 开头的情况，所以我们不用另外 worry 0 开头的情况啦。所以剩下的一位的只有 4 种情况，1、3、5、7。即 4*2。总共减去(5*4+4*2)28 种，结果为 152。

例 8．停车场划一排 12 个停车位置，今有 8 辆车需要停放，要求空车位连在一起，不同的停车方法是________种。

分析：把空车位看成一个元素，和 8 辆车共九个元素排列，因而共有 A（9,8）=362880 种停车方法。
（9 个车位停 8 个，要求顺序）
PS 把 4 个空车位绑起来变成一个~~~后面有具体捆绑法的讲解~~~

3．特殊元素，优先处理；特殊位置，优先考虑

例 9．六人站成一排，求（1）甲、乙既不在排头也不在排尾的排法数；（2）甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数。
*注意，排了甲乙还要排其他同学的（4P4）呢！
妹纸说：第一小题是个小热身~~~请把大脑用在第二小题。

分析：（1）按照先排出首位和末尾再排中间四位分步计数
第一类：排出首位和末尾、因为甲乙不在首位和末尾，那么首位和末尾实在其它四位数选出两位进行排列，一共有 A（4,2）=12 种；
第二类：由于六个元素中已经有两位排在首位和末尾，因此中间四位是把剩下的四位元素进行顺序排列，共 A（4,4）=24 种；
根据乘法原理得即不再排头也不在排尾数共 12×24=288 种。

（2）第一类：甲在排尾，乙在排头，有 A（4,4）种方法。
为什么呢：因为甲乙他们已经不能再相邻了啊！！！！所以情况是：乙，X，X，X，X，甲。中间四个随便你怎么排啊。。。但切记这个是排列！不是组合！（12、21 与 1 和 2、2 和 1 的问题）。所以他们只能 4*3*2*1 啦。
第二类：甲在排尾，乙不在排头，有 3×A（4,4）种方法。

如果捏是甲在排尾乙不在排头，那么就是：X，X，X，X，X，甲。但寺！甲乙不能相邻，而且乙呢不在排头，所以乙就只有 3 个位置可以选啦~~~然后剩下四个位置被另外四个瓜分。所以就是 3*4*3*2*1 咯。
第三类：乙在排头，甲不在排尾，有 3×A（4,4）种方法。
这个推理和上面一样。乙，X，X，X，X，X。第二位和最后一位不是甲，所以甲有 3 种选择~~~然后剩下爱站哪站哪~~~~3*4*3*2*1
第四类：甲不在排尾也不再排头，乙不在排头也不再排尾，有 6×A（4,4）种方法（排除相邻）。
甲不在排尾也不再排头，乙不在排头也不再排尾。那么他们就只能是：（X，甲，X，乙，X，X）、（X，乙，X，甲，X，X）、（X，X，甲，X，乙，X）、（X，X，乙，X，甲，X）、（X，甲，X，X，乙，X）、（X，乙，X，X，甲，X）。一起六种情况。剩下四个位子他们爱咋咋滴~~~所以是 6*4*3*2*1
共 A（4,4）+3×A（4,4）+3×A（4,4）+6×A（4,4）=312 种。（13*（4P4））

例 10．对某件产品的 6 件不同正品和 4 件不同次品进行一一测试，至区分出所有次品为止。若所有次品恰好在第五次测试时被全部发现，则这样的测试方法有多少种可能?

妹纸补充：相似 JJ（这题不是解题思路相同）
116.　【确定】一个运货的船，有好几个 boxes，每个 box 有 10 个碗，要从每个箱子里一次抽三个出来验货，如果次品数 at least 是 1 就不能 shipped，问有个箱子里次品数是 3，最后能 shipped 的概率是多大？
7/24　嘿嘿

分析：本题意指第五次测试的产品一定是次品，并且是最后一个次品，因而第五次测试应算是特殊位置了，分步完成。
第一步：第五次测试的有 C（4,1）种可能；（意思就是四个次品里面任何一个都有可能是第五次测试到的）
第二步：前四次有一件正品有 C（6,1）种可能。（一起有四个次品~要保证第五次测出全部次品切第五次测出次品，那么前四次里面就有一次会抽到正品。正品有 6 个，任何一个都有可能抽到~~）
第三步：前四次有 A（4,4）种可能。（除了最后一次必须是次品以外，前面四位数是什么顺序是随便的，所以他们有 4*3*2*1 种方法排）
∴　共有 4*6*4*3*2*1=576 种可能。
正题思路就是把第五次确定咯~先组合他们再排列他们~~~~但是注意这里是相乘因为他们要一起做才能完成~~~也就是他们只是任务的一个步骤~~~

4．捆绑与插空

例 11.　8 人排成一队：（1）甲乙必须相邻；（2）甲乙不相邻；（3）甲乙必须相邻且与丙不相邻；（4）甲乙必须相邻，丙丁必须相邻；（5）甲乙不相邻，丙丁不相邻

妹纸飘过：这题看起来类似于例 9 嗯~~~但是比例 9 简单而且是用捆绑插空的方法呢~~~

分析：（1）甲乙必须相邻，就是把甲乙捆绑；把他们看成一个人，然后就变成了 7 个人排队咯~~所以是 A（7,7）。因为甲乙他们俩直接自己又可以交换位置，所以就是 A（7,7）*2 = 10080 种。

（2）甲乙不相邻，有了上一步的基础者一步就好做啦~~~把全部的可能排列减去甲乙相邻的排列就可以了~~~~如果考试直接碰到也不要慌~~~就按这个思路也不会错哇~~~A（8,8）-A（7,7）*2= 30240。

（3）甲乙必须相邻且与丙不相邻，先求甲乙必须相邻且与丙相邻 A（6,6）*2*2。理由和上面一样哈~~~把三个人绑一起排列，就是 A（6,6）。其中在把甲乙绑一起和乙互相对换位置*2，然后在把帮在一起的甲乙对换位置*2。甲乙必须相邻且与丙不相邻 = 甲乙必须相邻—甲乙必须相邻且与丙相邻，即 A（7,7）*2-A（6,6）*2*2 = 7200。

（4）甲乙必须相邻，丙丁必须相邻。把甲乙绑一起，把丙丁绑一起。然后呢就变成 6 个人排 6 个位子了~~~~所以是 A（6,6）。可是甲乙可以换位置，丙丁也可以换位置，于是*2*2。
答案 A（6,6）*2*2=2880。

（5）甲乙不相邻，丙丁不相邻。
甲乙不相邻，丙丁不相邻 = 所有的可能排列—{[甲乙必须相邻（第一小题算的）+ 丙丁必须相邻（与第一小题算法一样）]—[甲乙必须相邻，丙丁必须相邻（第四小题算的）]}
剪掉甲乙必须相邻和丙丁必须相邻这部分比较好理解，但是由于（甲乙必须相邻+丙丁必须相邻）包括了（甲乙必须相邻，丙丁必须相邻）。所以要剪掉~~~~~~
A（8,8）- [A（7,7）*2*2—A（6,6）*2*2] = 17280。

5．间接计数法.

(1)排除法

例 12.　三行三列共九个点，以这些点为顶点可组成多少个三角形?

分析：有些问题正面求解有一定困难，可以采用间接法。

所求问题的方法数= 任意三个点的组合数—共线三点的方法数

即 C(9,3)— 8

∴　共 76 种。

例 13．正方体 8 个顶点中取出 4 个，可组成多少个四面体?

分析：所求问题的方法数=任意选四点的组合数-共面四点的方法数，

∴　共=70-12=58 个。还有平行四边形（上下左右前后）

例 14.　1，2，3，……，9 中取出两个分别作为对数的底数和真数，可组成多少个不同数值的对数?

哈哈。。。有木有跟我一样完全忘记对数是什么的童鞋。。。

补充知识：如果 a^x=N（a>0，且 a≠1），那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数（logarithm），记作 x=log(a) N .其中，a 叫做对数的底数，N 叫做真数。且 a>o，a≠1，N>0。

分析：由于底数不能为 1。

首先，当 1 选上时，1 必为真数，∴　有 1 种情况。

其次，当不选 1 时，从 2 至 9 中任取两个分别作为底数，真数，共 A（8,2）=56，其中 log（2）4=log（3）9 ，log（4）2=log（9）3 ,log（2）3=log（4）9 ,log（3）2=log（9）4.

因而一共有 53 个。

6．挡板的使用

（大份额分给小个体，每个个体都得有，就用挡板）

例 15．10 个名额分配到八个班，每班至少一个名额，问有多少种不同的分配方法?

下面 JJ 是不是有一点像。。。八过 JJ 这题难多了！！！具体解释请看 JJ~~~

44.　【确定】将 140 个东西均分给 N 个人，N≧2，且每个人至少得到两个，问 N 有多少种可能？

10　s 刷立现

分析：把 10 个名额看成十个元素，在这十个元素之间形成的九个空。（大

家发挥想象，电影院十个并排椅子中间有9个间隔）九个空中选出七个位置放置档板（在电影院椅子间放块板把两个椅子隔开），则每一种放置方式就相当于一种分配方式。因而共C(9，7)=36种。

7．注意排列组合的区别与联系：所有的排列都可以看作是先取组合，再做全排列；同样，组合如补充一个阶段(排序)可转化为排列问题。

例16.　用数字0，1，2，3，4，5组成没有重复数字的四位数，（1）可组成多少个不同的四位数?（2）可组成多少个不同的四位偶数？（3）可组成多少个能被3整除的四位数?

分析：（1）有A（6,4）-A（5,3）=300个。
A（6,4）为一起可以组成的四位数字总数~~~但寺！！！不要忘记0不能在第一位啊！！！！所以要把0XXX的情况剪掉，即A（5,3）。所以一起就是A（6,4）-A（5,3）啦~~~~

（2）分为两类：0在末位的情况：有A（5,3）=60种；
0不在末位的情况：有C（2,1）×A（5,3）-C（2,1）×A（4,2）=96种。
C（2,1）×A（5,3）表示的是：如果是偶数呢，末尾必须是2或者4啦，所以两个选一个啦，即C（2,1）。然后剩下三位呢就随便选啦A（5,3）。然后他们是两个步骤。所以相乘~~~
但寺！！！请不要忘记0在第一位的情况~~~~0XXX，最后一位还是两个选一个，即C（2,1）。然后剩下两位呢就随便选啦，即A（4,2）。这两个也是步骤~所以相乘~~~~~
∴ 共60+96=156种。

（3）先把四个相加能被3整除的四个数从小到大列举出来，即先选
0，1，2，3
0，1，3，5
0，2，3，4
0，3，4，5
1，2，4，5
它们排列出来的数一定可以被3整除，再排列，有：4×[A（4,4）-A（3,3)]+A（4,4）=96种。
妹纸这里一开始没有弄清楚为什么四个相加能被3整除组成的数就能被3整除。。。然后又继续挖啊挖~~~~解释是：假设这是两位数ab，把它写成10a+b，它的各位数字之和是a+b，两式相减，得9a，因为9a能被3整除，所以如果a+b能被3整除，那么ab也能被3整除。

假设这是三位数 abc，把它写成 100a+10b+c，它的各位数字之和是 a+b+c，两式相减，得 99a+9b，因为 99a+9b 能被 3 整除，所以如果 a+b+c 能被 3 整除，那么 abc 也能被 3 整除。
四位数，五位数，六位数……推导方法类似。
然后再要求排列就很好求啦~~前四列数字排列方法都是[A（4,4）（全部可能的四位数）—A（3,3）（0 开头的四位数）]，所以乘以 4。然后最后一组木有 0，所以不存在 0 开头的情况就能随便排啦~~~就是 A（4,4）。

8．分组问题

例 17.有疑问问题！
5 名学生分配到 4 个不同的科技小组参加活动，每个科技小组至少有一名学生参加，则分配方法共有多少种？
分析：（一）先把 5 个学生分成二人，一人，一人，一人各一组。
其中涉及到平均分成四组，有 C（5,3）=10 种分组方法。可以看成 4 个板三个板不空的隔板法。
（二）再考虑分配到四个不同的科技小组，有 A（4,4）=24 种。
由（一）（二）可知，共 10×24=240 种。

【排列与组合中比较难讲清楚的题型】

终于到最后一部分了！！！坚持下来的你们都是勇士！！！
妹纸坚持由浅入深的原则。所以底下的例题会有重复~~大家把懂的稍微扫一扫就行啦~~~请大家耐心一点~~~

题型一：重排问题求幂

例 1．把 6 名实习生分配到 7 个车间实习,共有多少种不同的分法？

解析：完成此事共分六步:把第一名实习生分配到车间有 7 种分法，把第二名实习生分配到车间也有 7 种分法，依此类推,由分步计。所以共有 7^6 种不同的排法。

小结：一般地 n 不同的元素没有限制地安排在 m 个位置上的排列数为 m^n 种。

例 2．（1）五名学生报名参加四项体育比赛，每人限报一项，报名方法的种数为多少？（2）又他们争夺这四项比赛的冠军，获得冠军的可能性有多少种？

分析：（1）5 名学生中任一名均可报其中的任一项，因此每个学生都有 4 种报名方法，5 名学生都报了项目才能算完成这一事件故报名方法种数为 4×4×4×4×4= 4^5 种
（2）每个项目只有一个冠军，每一名学生都可能获得其中的一项获军，因此每个项目获冠军的可能性有 5 种故有 n=5× 5 × 5 × 5 = 5^4 种。

例 1 每个实习生只能去 1 个车间，以人作为分步标准。
例 2（1）中每个学生报 1 项，以人作为分步标准（2）中每个项目只有 1 个冠军，以项目作为分步标准。

题型二：定序问题除阶乘法、空位法、插入法

最难理解的是除阶乘法。

例 3. 重点！从来不知道的一种算法
有 4 个男生和 3 个女生排成一排(1)若甲必须在乙的右边（可以相邻，也可以不相邻），有多少种站法？(2)全体站成一排，甲、乙、丙三人自左向右顺序不变？

分析：除阶乘法：对于某几个元素顺序一定的排列问题,可先把这几个元素与其他元素一起进行排列,然后用总排列数除以这几个元素之间的全排列数。
（1）7 个人全排列是 7!，因为剩余 5 个人如果排好了，甲乙本身有 2！种排法，符合题意的只有 1 种，占了 1/2!，所以结果是 7！/2！。
（2）7 个人全排列是 7!，因为剩余 4 个人如果排好了，甲乙丙三人有 3！种排法，符合题意的只有 1 种，占了 1/3!，所以结果是 7！/3！。

空位法:其实就是捆绑法啦~~~
（2）设想有 7 把椅子让除甲乙丙以外的四人就坐共有 A（4,7）种方法，其余的三个位置甲乙丙共有 1 种坐法，则共有 A（4,7）种方法。

插入法：其实就是插空法啦~~~
（2）先排甲乙丙三个人,共有 1 种排法,再把其余 4 四人依次插入共有 4*5*6*7 方法。

这里注意（1）不能用后面两种方法~~~因为甲和乙不一定是一直挨在一起

的!!!题目说甲必须在乙的右边,但是补充了条件“可以相邻或者不相邻”。。。

题型三：等分与不等分问题

（一） 等分

例 4.6 本不同的书，按下列条件，各有多少种不同的分法；
（1）分给甲、乙、丙三人，每人两本；
（2）分成三堆，每堆两本；（每堆都是一样的，所以要除以 3P3，但是上面的每个人都是不同的人所以可以）

分析：（1）C（2,6）*C（2，4）*C（2,2）这里很好理解。就不解释啦

（2）分三步取书得 C（2,6）*C（2，4）*C（2,2）种方法,但这里出现重复计数的现象。
不妨记 6 本书为 ABCDEF。若第一步取 AB,第二步取 CD,第三步取 EF。该分法记为(AB,CD,EF),则 C（2,6）*C（2，4）*C（2,2）中还有(AB,EF,CD),(CD,AB,EF),(CD,EF,AB) (EF,CD,AB),(EF,AB,CD)共有 A(3,3)种取法。而这些分法仅是(AB,CD,EF)一种分法,故共有 C（2,6）*C（2，4）*C（2,2）/A(3,3)种分法。
如果出现 2 个平均分配，除以 A(2，2).
例如：将 13 个球队分成 3 组,一组 5 个队,其它两组 4 个队, 有多少分法?
按照上面的分析，答案应该为 C(5,13)*C(4,8)*C(4,4)/A(2,2)。

（二） 不等分

接例 4.（3）分成三份，一份 1 本，一份 2 本，一份 3 本；
答案应为 C(1,6)*C(2,5)*C(3,3)或写成 C(3,6)*C(2,3)*C(1,1)

（4）分给甲、乙、丙 3 人，一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本；
答案应为 C(1,6)*C(2,5)*C(3,3)*A(3,3) 或写成 C(3,6)*C(2,3)*C(1,1)*A(3,3)

（5）分成 3 份，一份 4 本，其他两份各 1 本；
答案应为 C(1,6)*C(1,5)*C(4,4)/A(2,2) 或写成 C(4,6)*C(1,2)*C(1,1)/A(2,2)
注意这里有均分哦~~所以要除以 A(2,2)。。

（6）分给甲、乙、丙三人，一人 4 本，另外两人各 1 本；
[C(1,6)*C(1,5)*C(4,4)/A(2,2)]*A(3,3) 或 写 成 [C(4,6)*C(1,2)*C(1,1)/A(2,2)]*A(3,3)
注意这里要先把均分的除掉再乘以可能的排列~~~~

（7）分给甲、乙、丙 3 人，每人至少一本；
答案应为(1)(4)(6)的结果进行相加。

（8）分给 5 个人，每人至少一本；
从 6 本中选 2 本捆绑在一起，再全排列 C(2,6)*A(4,4)

（9）6 本相同的书，分给甲乙丙三人，每人至少一本。

法一：隔板法，因为 6 本书没有差别，把它们排成一排。相邻书之间有 5 个空隙。在 5 个空档中选 2 个位置插个隔板，可把书分成 3 份，对应地分给 3 个人，每一种插板方法对应一种分法共有 C(2,5)种分法。

法二：分类讨论，共有三种分法，第一类（2,2,2），只有 1 种分法；第二类（1,2,3），有 A(3,3)=6 种分法；第三类（1,1,4）有 A(3,1)= 3 种分法.

另附上两个感觉有用的帖子，因为格式文件无法复制，故大家可自行去帖子上查看或下载——

高中数学教材———排列组合（对付 GMAT 数学应该足够啦）：

http://forum.chasedream.com/thread-498284-1-9.html

十个免费在线模拟考试及分项测试网站（欢迎大家多多补充 Online Free GMAT Test 资源）：

http://forum.chasedream.com/thread-446348-1-7.html